



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio *IX*



Palchetto *2*

Num.º d'ordine *10* *481*

3370

NAZIONALE

B. Prov.

I

591

VITT. EM. III

NAPOLI

BP.

I

594

606757 SON

ELEMENTI

DI

ARITMETICA

DI

F. AMANTE.



TERZA EDIZIONE

RIVEDUTA E CORRETTA DALL' AUTORE.



NAPOLI

Dalla Reale Tipografia della Guerra
1841.

12/1/11

Avvertimento.

Questa terza edizione de' nostri Elementi di Aritmetica non differisce dalla precedente, forse già troppo cresciuta di mole, se non per le correzioni che sempre occorrono a chi rivede un lavoro proprio dopo molto tempo, e per quelle altre indicateci dalla cortesia di persone che ebbero la pazienza di esaminarla accuratamente, ed alle quali ci dichiariamo obbligatissimi. Nulladimeno alcuni articoli hanno ricevuto importanti miglioramenti.



ELEMENTI DI ARITMETICA.

PRELIMINARI.

§. 1.

Distinzione delle diverse specie di grandezze, o quantità.



GRANDEZZA, o quantità si chiama tutto ciò che è capace di essere accresciuto o diminuito. Per esempio una compagnia di soldati può essere accresciuta aggiungendovi altri soldati, e può essere anche diminuita togliendone alcuni. Dunque quella compagnia o unione di soldati, che si chiama *numero* di soldati, è capace di aumento o di diminuzione, ed è perciò una grandezza. Una strada in città può allargarsi tagliando una porzione delle fabbriche vicine, e può restringersi avanzando in vece nuove fabbriche in mezzo della medesima. Dunque la larghezza della strada è capace di aumento o di diminuzione, ed è pure una quantità.

Vi sono in generale due specie di grandezze o quantità; la quantità *continua*, e la quantità *discreta*.

S'intende per quantità *continua* quella in cui si considera soltanto l'estensione continuata, e non interrotta delle parti; come sarebbe una piazza, una strada, un campo, in cui si riguarda l'ampiezza soltanto, o l'estensione.

S'intende per quantità *discreta* quella che si considera come l'unione di più parti uguali o di più cose simili, e si chiama *numero*; come sarebbe il numero delle miglia comprese nella distanza fra due luoghi, o il numero de' ducati che compongono una somma di denaro.

La *Geometria* si occupa delle quantità continue, e l'*Aritmetica* si occupa delle quantità discrete, ossia de' numeri.

§. 2.

Del sistema di numerazione.

Per numero dunque s'intende l'unione di più cose simili; così un numero di uomini è l'unione di più uomini; un numero di cannoni è l'unione di più cannoni ec.

Unità si chiama una delle cose simili che compongono il numero, il quale si considera perciò come l'unione di molte unità. Questa unione di unità potendo essere più o meno grande, ed essendo capace anche di crescere indefinitamente, è chiaro che vi sono moltissimi, ed anzi infiniti numeri tutti fra loro diversi. Per distinguerli uno dall'altro, e per giudicare della loro grandezza rispettiva, è necessario indicarli con parole, e con cifre scritte corrispondenti alle parole; ma non potendosi adoperare infinite parole ed infinite cifre per rappresentarli, convien servirsi di poche cifre e di poche parole, e procurare di combinarle in modo che possano facilmente rappresentare qualunque numero.

Sistema di numerazione si chiama appunto la *convenzione*, ossia il generale accordo de'dotti che stabilisce quelle parole, e quelle cifre principali, ed il modo ancora di farne uso, onde esprimere con esse qualunque numero. Le cifre principali e le loro denominazioni sono le seguenti:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove,

La prima corrisponde all'unità, e le altre rappresentano unioni, o collezioni di unità gradatamente maggiori, dimodochè ognuna di esse supera la precedente di una unità.

Se all'ultimo numero *nove* si aggiunga un'unità, si avrà un altro numero che si esprime con la parola *dieci*, e corrisponde al numero delle dita che contiamo nelle due mani. Questo numero ha servito mirabilmente a combinare le nove cifre precedenti nel modo più semplice e breve per esprimere tutti i numeri immaginabili, ed è considerato perciò come il fondamento del nostro sistema di numerazione, il quale prende da esso il nome di sistema *decimale* di numerazione.

Si è stabilito che un'unità situata alla sinistra di un'unità semplice debba valere dieci volte l'unità semplice, ossia debba eguagliare l'unione di dieci unità semplici; una terza unità situata alla sinistra della seconda, debba valere dieci volte la seconda, e così di seguito.

Si sono formate dunque diverse specie o classi di unità crescenti dalla destra verso la sinistra, che si distinguono co' nomi qui sotto notati.

centinaio di migliaia
decina di migliaia
migliaio
centinaio
decina
unità

Per tal modo componendo un numero con più cifre una vicina all'altra, questo numero sarà la collezione di diverse specie di unità, delle quali ognuna vale dieci volte la sua vicina a destra, e dicesi *decupla* della medesima. Per esempio il numero 327 composto di tre cifre contiene *sette* unità, *due* decine, e *tre* centinaia, le quali si considerano tutte riunite, e formanti un solo insieme, o come suol dirsi, un *sol tutto*.

A ciascuna classe o specie di unità appartengono nove numeri come alla classe dello unità semplici. Così le decine possono essere una, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, e nove; nè possono essero più di nove, perchè un numero composto di dieci decine prende il nome di centinaia. Lo stesso vale per le centinaia, per le migliaia co. Questi nove numeri si distinguono, per le varie classi di unità, coi seguenti nomi,

Per le decine i nomi sono,
dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, e novanta.

Per le centinaia,
cento, duecento, trecento. novocento.

Per le migliaia,
mille, duemila, tremila. novemila.

Per le decine di migliaia, e centinaia di migliaia,
diecimila, ventimila, trentamila. novantamila.
centomila, duecentomila, trecentomila. novecentomila.

Un numero composto di più cifre appartenenti a diverse classi si nomina riunendo insieme i nomi particolari dello cifre che contiene. Per esempio il numero precedente 327, si nomina *trecento ventisette*; il numero 35271, si nomina *trentacinquemila duecento settantuno*, e così di altri. Solamente i nomi di alcuni numeri di due cifre si compongono in un modo particolare; il numero 11 si nomina *undici* in vece di *dieci-uno*, ed i numeri 12, 13, 14, 15, 16, si nominano *dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici*.

Estendendo le classi delle unità al di là delle centinaia di migliaia, con lo stesso principio che una nuova unità debba sempre esser decupla della sua vicina a destra, la settima cifra prende il nome di *milione*. Le unità seguenti, cioè l'ottava, la nona etc. sino alla dodicesima inclusivamente, si distinguono usando le denominazioni di sopra indicato per le prime sei cifre coll'aggiunta della parola *milione*. Così i numeri del settimo, ottavo, nono etc. luogo sarauno espressi come segue,

Un milione, due milioni, tre milioni. . .

Dieci milioni, venti milioni, trenta milioni. . .

Cento milioni, duecento milioni. . .

Mille milioni, duemila milioni, etc.

L'unità situata nel tredicesimo luogo prende il nome di *bilione*. Appartengono al bilione sei cifre come al milione, le quali si distinguono sempre colle denominazioni usate per le prime sei

cifre, aggiungendo la parola *bilione*. Lo stesso vale pel *trilione*, pel *quadrilione* etc.

Si concepisce facilmente come queste denominazioni bastino per esprimere qualunque numero. Non bastano però a scriverlo le nove cifre sopra riportate. In fatti può darsi il caso che un numero composto di più cifre non contenga unità di una certa classe: per esempio il numero trecento e sette contiene tre centinaia e sette unità semplici, senza decine. Allora se si scrivesse colle sole due cifre 37 senz'altro, si leggerebbe *trentasette*. Per supplire a questa mancanza si è immaginata la cifra, 0, che si pronunzia *zero*, e non ha alcun valore, ma serve soltanto a conservare alle diverse cifre il loro luogo. Così il numero trecento e sette si scriverà 307. Mancando le unità di molte classi, si suppliranno sempre con altrettanti zeri. In questo modo si scriveranno i numeri, *dieci, cento, mille, diecimila* etc.

10, 100, 1000, 10000, e simili.

Le prime nove cifre si chiamano *significative* per distinguerle dalla cifra zero che non ha alcun valore.

§. 3.

Maniera di leggere un numero.

Per leggere un numero si separano le sue cifre da sei in sei con virgole, cominciando dalla destra. Ogni gruppo di sei cifre contiene le unità, le decine, le centinaia, le migliaia, le decine di migliaia, e le centinaia di migliaia di una medesima denominazione, e le denominazioni sono quelle accennate di sopra, cioè:

- 1.º gruppo. . . . unità.
- 2.º gruppo. . . . milioni.
- 3.º gruppo. . . . bilioni.
- 4.º gruppo. . . . trilioni etc.

come si osserva nel numero

trilioni bilioni milioni unità

4.351, 607.200, 925,001, 003.005

che si pronunzia *quattromila trecento cinquantuno trilioni, seicento settemila e duecento bilioni, novecento venticinque mila ed un milione, tremila e cinque* (*).

(*) Il sistema di numerazione esposto nel §. precedente è quello usato generalmente in Italia. I francesi, ritenendo lo stesso cifre e la stessa convenzione nel combinarle, cambiano però le denominazioni da tre in tre cifre invece di cambiarle da sette in sette. Così essi considerano il *migliajo* come una denominazione da non più riprodursi; dopo il migliajo alla settima cifra viene il *milione*, dopo il milione alla decima cifra viene il *bilione*, alla tredicesima il *trilione* etc. Secondo questo sistema ogni denominazione ha tre cifre in vece di sei; e quindi non si contano se non *unità, decine e centinaia* di milioni, *unità, decine e centinaia* di bi-

È da osservarsi ancora che in ogni gruppo di sei cifre le prime tre a sinistra si leggono come se fossero sole, aggiungendo soltanto la parola *mila*. Così il numero 425.330 si legge, *quattrocentoventicinque mila e trecentotrenta*; dimodochè la lettura di un numero qualunque si riduce in fine alla lettura di un numero di tre cifre.

Dopo di essersi perfettamente addestrati a leggere qualunque numero, non è difficile anche scriverlo sotto la dettatura, e basta per ciò ricordarsi che ad ogni denominazione competono sei cifre, per cui bisogna supplire con zeri quei luoghi che, dall'enunciazione del numero, si conosce che rimangono vuoti di cifre significative. È chiaro poi che le cifre del primo gruppo a sinistra, dalle quali si comincia sempre a leggere o a scrivere il numero, non è necessario che siano sei, come quelle degli altri gruppi.

§. 4.

Cosa sia un numero astratto, ed un numero concreto.

Numeri astratti sono quelli che rappresentano una collezione di unità di cui non si conosce, o non si è fissata la natura, o la specie. Così quando si pronunzia *duecento e tre* senza aggiungere altro, s'intende una collezione di duecento e tre unità di qualità o specie non conosciuta, e questo numero si chiama *astratto*; ma quando si dice duecento e tre uomini, duecento e tre ducati etc., allora la specie dell'unità è l'uomo, il ducato etc., ed il numero si chiama *concreto*.

OPERAZIONI SU I NUMERI INTERI.

§. 5.

Dell'addizione de' numeri interi.

L'*addizione* è quella operazione che ha per oggetto di riunire più numeri in un solo.

Le addizioni de' numeri di una sola cifra sono facili ad eseguirsi a memoria con un poco di pratica. Per agevolare ai ra-

lioni, e così di seguito. Il numero considerato qui sopra sarebbe, col sistema francese, distribuito in gruppi di tre cifre come segue

$4^{VI}, 351^{V}, 607^{IV}, 200^{III}, 925^{II}, 001^{I}, 003^{0}, 005$

e si leggerebbe, *quattro sestilioni, trecento cinquantuno quintilioni, seicento e sette quatrilioni, duecento trilioni, novecento venticinque bilioni, un milione, tremila e cinque.*

gazzi questo esercizio sarà utile la tavola qui sotto riportata, nella quale i risultamenti delle addizioni successive di un numero della prima colonna con tutti quelli posti sulla stessa linea orizzontale, si trovano registrati in piedi delle colonne seguenti (*).

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9									1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18																	

Quando i numeri da aggiungersi sono composti di più cifre, è chiaro che l'addizione dovrà eseguirsi aggiungendo fra loro le unità della stessa classe; cioè le unità semplici si aggiungeranno alle unità semplici, le decine alle decine, le centinaia alle centinaia, le migliaia alle migliaia etc.

In questo modo l'addizione de' numeri composti di più cifre non è che una ripetizione dell'addizione de' numeri di una sola cifra, come si vede nell'esempio;

$$\begin{array}{r}
 423 \\
 214 \\
 322 \\
 \hline
 959.
 \end{array}$$

(*) Si poteva dare alle somme de' numeri semplici la stessa disposizione che hanno i prodotti nella tavola pitagorica. Ma abbiamo preferito il quadro precedente perchè mostra tutte le maniere di comporre un numero con l'addizione di due numeri più piccoli.

Il risultamento dell'addizione dicesi *somma*; così il numero 959 è la somma de' tre numeri 423, 214, e 322.

Ma può accadere che la somma delle unità semplici sorpassi il numero 9; allora essa sarà composta di due cifre, e conterrà una o più decine, e queste ultime appartenendo al secondo luogo, dovranno aggiungersi alla somma delle decine. Se anche la somma dello decine sorpassa il 9, allora è segno che contiene qualche centinaja, e dovrà questo aggiungersi alla somma dello centinaja; e così di seguito. Tutto ciò si rende manifesto nell'esempio:

	429
	86
	927
<i>Somma delle unità.</i>	22
<i>delle decine.</i>	12
<i>delle centinaja</i>	13
<i>Somma totale</i>	1442.

Ma in vece di scrivere le decine provenienti dalla somma delle unità, e le centinaja risultanti dalla somma delle decine, per poi tenerne conto nella somma totale, si potrà pervenire più presto a quest'ultimo risultamento, ritenendo a memoria quelle decine e quelle centinaja, ed aggiungendole rispettivamente ai numeri che si ottengono dall'addizione delle decine e da quella delle centinaja, come si osserva qui appresso;

$$\begin{array}{r}
 429 \\
 86 \\
 \hline
 927 \\
 1442.
 \end{array}$$

Donque la regola per eseguire l'addizione sarà la seguente: *Scrivete i numeri da sommarli gli uni sotto gli altri, situando le unità della stessa classe in una medesima colonna, e tirate una linea sotto l'ultimo numero per separarlo dal risultamento. Sommate i numeri contenuti in ciascuna colonna, cominciando dalla destra; se la somma non sorpassa il 9, scrivetela come l'avete ottenuta, e se contiene una o più decine, ritenetele a memoria per riunirle ai numeri della colonna seguente. Finalmente scrivete la somma dell'ultima colonna come risulta dall'operazione.*

§. 6.

Della sottrazione de' numeri interi.

La *sottrazione* è un'operazione che ha per oggetto di togliere un numero da un altro. Il numero maggiore si chiama *sottraendo*, ed il minore *sottrattore*.

La sottrazione de' numeri di una sola cifra è facile ad eseguirsi

a memoria. Per facilitare ai ragazzi questo esercizio si può far uso della stessa tavola adoperata per l'addizione. Ne' numeri composti di più cifre si sottraggono le une dalle altre le unità della stessa classe, e così questa operazione non è che una ripetizione della sottrazione de' numeri di una sola cifra: si sottraggono dunque le unità dalle unità, le decine dalle decine etc.

Ma può accadere che il numero da sottrarsi in una colonna qualunque sia maggiore di quello da cui deve togliersi. Allora si farà come nell'esempio seguente

$$\begin{array}{r} 4063 \\ 387 \\ \hline 3676 \end{array}$$

Non potendo togliersi il 7 dal 3 si aggiunge a questo numero una decina improntata dalla seconda colonna, considerando il numero superiore 4063 decomposto ne' due numeri 4050, e 13. Così il 7 potrà sottrarsi dal 13, e rimarrà 6. Si verifica lo stesso inconveniente nella sottrazione delle cifre della seconda colonna, perchè da 5 non può togliersi 8, e bisognerà improntare un'unità dalla terza colonna. Ma la terza colonna non avendo cifre significative, bisogna ricorrere alla quarta, supponendo il numero 4050 spezzato in due, cioè 3900 e 150. Per tal modo dalle 15 decine potranno togliersi le 8 del numero inferiore, e dalle rimanenti 9 centinaia del numero superiore si toglieranno pure in seguito le 3 centinaia del numero inferiore.

Dopo di ciò la regola della sottrazione sarà la seguente: *Situate il numero minore sotto al maggiore, e tirate una linea per separarlo dal risultamento. Sottraete il numero di ciascuna colonna dal suo superiore cominciando dalla destra, e quando ciò non possa eseguirsi, aumentate la cifra del sottraendo di una decina presa dalla colonna seguente. Nel caso che vi siano zeri intermedi, considerateli come 9, e diminuite di una unità la prima cifra significativa a sinistra degli zeri medesimi.*

Il risultamento della sottrazione di un numero da un altro dicesi *resto*, ed in alcune circostanze prende anche il nome di *eccesso*, e di *differenza*. Si chiama *resto* quando con la sottrazione si vuol conoscere ciò che rimane da un dato numero togliendone un altro più piccolo. Per esempio una persona aveva in tasca 10 ducati; ne ha spesi 7 e vuol sapere ciò che gli è rimasto. Fatta la sottrazione, il *resto* del denaro è 3. Si chiama *eccesso* quando paragonando fra loro due numeri si vuol conoscere per mezzo della sottrazione di quanto uno è maggiore dell'altro. Così misurando la statura di due soldati, si vuol sapere quanto uno è più alto dell'altro. Il primo è alto 6 palmi, ed il secondo 5, e quindi l'*eccesso* dell'altezza del primo su quella del secondo è un palmo. Finalmente si chiama *differenza* allorchè nel paragonare fra loro due numeri, non si giudica se non della ineguaglianza de' medesimi. Così nell'esempio addotto non si cerca sapere quale de' due soldati sia più alto, ma solo la disparità delle loro altezze. Le altezze essendo 6, e 5 palmi, si dirà che la loro *differenza* è un palmo.

§. 7.

Della ripruova dell' addizione , e della sottrazione.

Se dopo aver eseguita l'addizione di più numeri, dalla somma ottenuta si sottraggano una dopo l'altra le somme parziali di cui è composta, cioè la somma delle unità, quella delle decine, quella delle centinaja etc., è chiaro che, quando l'operazione sia ben fatta, non dovrà rimaner nulla. Le sottrazioni si cominceranno dalla sinistra per maggior facilità. Così per fare la ripruova dell'addizione eseguita nel §. 5, dalle 14 centinaja della somma

	429
	86
	<u>927</u>
Somma totale	1442
Idem delle centinaja	<u>13</u>
	14
delle decine .	<u>12</u>
	22
delle unità .	<u>22</u>
	00

totale si toglierà la somma 13 delle centinaja contenute nella prima colonna a sinistra. Al resto 1 mettendo a fianco le decine della somma totale si avrà 14, da cui tolta la somma delle decine contenute nella seconda colonna, si otterrà per secondo resto 2. A questo ponendo a fianco le unità della somma totale si avrà 22, da cui sottratta la somma delle unità contenute nella terza colonna, si otterrà per ultimo resto zero. L'operazione dunque era ben fatta.

Per la ripruova della sottrazione, è evidente che il sottrattore aggiunto al resto deve dare il sottraendo, il quale può considerarsi composto del sottrattore, e del resto. Perciò la ripruova della sottrazione si esegue per mezzo dell'addizione.

Esempio

	4270
	329
	<u>3941</u>
resto	329
sottrattore	<u>329</u>
Somma, o sottraendo	4270

Della moltiplicazione de' numeri interi.

La *moltiplicazione* de' numeri interi è un'abbreviazione dell'*addizione*; quando i numeri da aggiungersi sono fra loro eguali.

Per esempio debba eseguirsi l'*addizione*,

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

Questa operazione consiste nel ripetere il numero 16 quattro volte, e si esegue più brevemente colle regole della moltiplicazione.

In una moltiplicazione si distinguono tre numeri: il *moltiplicando* ch'è il numero da ripetersi, il *moltiplicatore* che indica quanto volte deve ripetersi, ed il *prodotto* ch'è il risultamento della operazione. Nell'esempio proposto 16 è il moltiplicando, 4 è il moltiplicatore, e 64 è il prodotto.

In generale; *nella moltiplicazione il prodotto si ottiene ripetendo tante volte il moltiplicando, quante unità si contano nel moltiplicatore*: o ciò che vale lo stesso, *il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando, nello stesso modo che il moltiplicatore si forma per mezzo dell'unità*. Nell'esempio precedente, il moltiplicatore 4 si forma dall'unione o dalla somma di *quattro* unità, ed allo stesso modo, il prodotto 64 si forma dall'unione o dalla somma di *quattro* 16, ossia di quattro volte il moltiplicando.

Un numero che si ottiene da un altro ripetuto due volte si chiama *doppio* del medesimo. Così ripetendo due volte il numero 4, si ha il numero 8 che dicesi *doppio* del 4; ed è chiaro ancora che il numero 8 *contiene* in se stesso, o comprende due volte il 4, e che quest'ultimo è *contenuto* o compreso due volte nell'8. Se un numero si ottiene da un altro ripetuto *tre* volte, ossia se un numero contiene un altro *tre* volte, si chiama *triplo* di quello, se lo contiene *quattro* volte, dicesi *quadruplo*; *cinque* volte, *quintuplo* etc. Per esempio 6 è doppio di 3, e triplo di 2; e 20 è doppio di 10, quintuplo di 4, o *decuplo* di 2.

Da quanto precede si può conchiudere che *nella moltiplicazione il prodotto è doppio, triplo, quadruplo etc. del moltiplicando, se il moltiplicatore è in corrispondenza doppio, triplo, quadruplo etc. dell'unità; e se il moltiplicatore è eguale all'unità, il prodotto è eguale al moltiplicando*.

Il moltiplicando ed il moltiplicatore si chiamano *fattori* del prodotto; così 16, e 4 sono i fattori di 64.

La moltiplicazione de' numeri offre tre casi: 1.^o la moltiplicazione di due numeri di una sola cifra: 2.^o la moltiplicazione di un nu-

mero di più cifre per un numero di una sola cifra: 3.° la moltiplicazione di un numero di più cifre per un altro numero di più cifre.

1.° La moltiplicazione de' numeri di una sola cifra è facile ad eseguirsi per mezzo della seguente tavola detta di Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Per formare questa tavola si scrivono in una linea orizzontale i numeri

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

si aggiunge poi ciascun numero con se stesso, e si forma una seconda linea; la somma dei numeri della prima e della seconda linea darà la terza linea; e quella de' numeri della prima e della terza darà la quarta, e così di seguito. Per tal modo ogni numero della seconda linea corrisponde a ciascun numero della prima ripetuto due volte; ogni numero della terza linea corrisponde a quello della prima ripetuto tre volte etc. L'uso della tavola è molto facile.

Nella tavola di Pitagora si osserva che *il prodotto di un numero per un altro rimane lo stesso, se si prende il moltiplicatore per moltiplicando, ed il moltiplicando per moltiplicatore.* Per esempio il prodotto di 3 per 5 è lo stesso di quello di 5 per 3; cioè 5 ripetuto tre volte, è lo stesso che 3 ripetuto cinque volte. Per dar ragione di questo fatto, si dispongano in una linea orizzontale le unità contenuto nel numero 5, e si scrivano due linee simili al di sotto; si avranno così disposte in un quadro tutte le unità contenute nel prodotto 15.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Ora, si vede che contando le linee orizzontali, il prodotto o il quadro risulta dal 5 ripetuto tre volte, e contando le colonne verticali, risulta dal 3 ripetuto cinque volte; e però 5 ripetuto tre volte è la stessa cosa di 3 ripetuto cinque volte.

2.^o Per moltiplicare un numero di più cifre per un numero di una sola cifra, si prenda per esempio la moltiplicazione di 267 per 4; l'operazione da eseguirsi è quella di ripetere il numero 267 quattro volte, ed è chiaro che bisognerà ripetere quattro volte le unità, quattro volte le decine, e quattro volte le centinaia che sono in quel numero, e sommare i risultamenti che se ne ottengono. La moltiplicazione potrebbe dunque farsi come segue,

$$\begin{array}{r} 267 \\ 4 \\ \hline 28 \\ 24 \\ 8 \\ \hline 1068 \end{array}$$

Ma invece di scrivere tre prodotti, si potrà scriverne un solo, ritenendo a memoria le decine ottenute dal primo prodotto delle unità semplici, per aggiungerle al prodotto delle decine, e ritenendo a memoria le centinaia ottenute dal prodotto delle decine, per unirle al prodotto delle centinaia. L'operazione abbreviata sarà,

$$\begin{array}{r} 267 \\ 4 \\ \hline 1068 \end{array}$$

Prima di passare al 3.^o caso della moltiplicazione, vediamo come potrebbe moltiplicarsi il numero 267 per 40. Moltiplicare 267 per 40 significa ripeterlo quaranta volte, o sia dieci volte quattro. Per ripetere il numero 267 quattro volte si userà la regola precedente, e si otterrà 1068. Questo prodotto deve ora ripetersi 10 volte, il che si ottiene subito aggiungendovi uno zero, giacchè allora le unità diventano decine, le decine diventano centinaia, le centinaia diventano migliaia, e le migliaia, decine di migliaia, onde ogni unità del numero 1068 rimane moltiplicata per 10. Se il numero 267 dovesse moltiplicarsi per 400, lo stesso ragionamento ci farebbe conoscere che dovrebbe moltiplicarsi per 4, e poi aggiugnervi due zeri. E se il numero dovesse moltiplicarsi per 4000, si moltiplicherebbe prima per 4 e poi vi si aggiungerebbero tre zeri, e così di seguito. Si opererebbe allo stesso modo se dovesse moltiplicarsi un numero per 30, per 300, o per 3000 etc., e per qualunque altra cifra significativa seguita da uno o più zeri.

3.^o Sia da moltiplicarsi il numero 267 per 324. Bisognerà ripetere il numero 267 trecento ventiquattro volte, cioè trecento volte, più venti volte, più quattro volte. Dovrà per conseguenza moltiplicarsi il 267 prima per 4, poi per 20, indi per 300, e

sommare i tre prodotti parziali ottenuti. Questa operazione dopo ciò che si è detto finora non ha alcuna difficoltà, e si eseguirà come qui appresso.

<i>Moltiplicando</i>	267
<i>Moltiplicatore</i>	324
1.° prodotto parziale	1068
2.° prodotto parziale	5340
3.° prodotto parziale	80100
<i>Prodotto totale</i>	86508

dove possono omettersi senza inconveniente gli zeri situati alla destra del 2.° e del 3.° prodotto parziale, purchè le cifre significative de' prodotti medesimi siano collocate nel proprio luogo.

Allorchè il moltiplicando contiene uno o più zeri alla dritta, si tralasceranno per brevità nell'eseguire la moltiplicazione, ma si aggiungeranno dopo terminata l'operazione alla destra del prodotto ottenuto, affine di conservare ad ogni cifra significativa il luogo che le compete. Lo stesso potrà farsi se il moltiplicatore è seguito da zeri, per una ragione analoga a quella accennata di sopra relativamente alla moltiplicazione di un numero qualunque per una cifra significativa seguita da zeri. Quindi se ambedue i fattori contengono uno o più zeri alla dritta, si tralasceranno tutti nell'eseguire la moltiplicazione, e si aggiungeranno in fine a destra del prodotto.

Quando il moltiplicatore contiene qualche zero fra mezzo alle cifre significative, siccome il prodotto parziale corrispondente a quella cifra zero sarebbe composto di soli zeri, così potrà omettersi per brevità di scrittura, badando di situare convenientemente il prodotto parziale che viene appresso.

La regola della moltiplicazione sarà dunque la seguente: *Per moltiplicare due numeri qualsivogliono, si formano i prodotti parziali di ogni cifra del moltiplicatore per tutto il moltiplicando e si sommano, badando bene di situare le unità sotto le unità, le decine sotto le decine etc. Quando il moltiplicando o il moltiplicatore, oppure ambedue, contengono uno o più zeri alla dritta, non si terrà conto alcuno di tali zeri nell'eseguire l'operazione, ma si scriveranno in fine alla destra del prodotto ottenuto.*

§. 9.

Della divisione de' numeri interi.

La *divisione* è quella operazione per la quale dato un prodotto ed uno de' suoi fattori, si cerca l'altro fattore. È dato per esempio il prodotto 64 ed uno de' suoi fattori 16; la divisione ha per oggetto di trovare l'altro fattore 4.

Nella divisione si considerano dunque tre numeri cioè, il prodotto dato, che si chiama *dividendo*, il fattore dato, che si chiama *divisore*, ed il fattore cercato, che si chiama *quoziente*. Questi numeri si situano come qui sotto.

$$\begin{array}{rcl} \textit{Dividendo, o prodotto dato} & & \textit{Divisore, o fattore dato} \\ 64 & & \begin{array}{r} 16 \\ \hline 4 \end{array} \\ & & \textit{4 quoziente, o fattore cercato.} \end{array}$$

E poichè il divisore ed il quoziente sono i due fattori del dividendo, si può conchiudere che, *in una divisione qualunque il divisore moltiplicato pel quoziente deve dare il dividendo.*

Considerando i tre numeri 64, 16, e 4 come il *prodotto* ed i *fattori* di una moltiplicazione, si è già detto di sopra che il prodotto 64 contiene tante volte il moltiplicando 16, quante unità si contano nel moltiplicatore 4; e siccome la divisione ha per oggetto di trovare quest'ultimo numero, così potrà anche dirsi che la divisione ha per oggetto di trovare il numero delle volte che il 16 è contenuto nel 64, ed in generale: la divisione è quella operazione per mezzo della quale si cerca di conoscere quante volte un numero è contenuto in un altro. Per trovare quante volte il numero 16 è contenuto nel 64, potrebbe adoperarsi la sottrazione ripetuta, come segue;

$$\begin{array}{r} 64 \\ 16 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline 00 \end{array}$$

dalla quale operazione si vede che il 16 è contenuto quattro volte nel 64, poichè tolto quattro volte dal 64 si è avuto un resto zero. Per mezzo della divisione si giunge più presto a questo risultamento, per cui può dirsi che la divisione è un'abbreviazione della sottrazione.

Inoltre il prodotto 64 può anche considerarsi come il 4 ripetuto 16 volte, perchè ripetere quattro volte 16 è lo stesso che ripetere 16 volte 4 (§. 8.). Quindi il numero 64 può suppirsi composto di 16 parti eguali, ognuna delle quali è un 4; quando si divide 64 per 16 l'operazione si riduce dunque a decomporre il numero 64 in sedici parti eguali, e trovare il valore di una di queste parti, che sarebbe 4. Ciò posto si vede che la divisione può considerarsi anche come una operazione nella quale

si cerca di decomporre un numero dato in tante parti eguali, quante unità sono contenute in un altro numero dato.

Dunque la divisione può considerarsi sotto tre diversi aspetti.

1.^o La divisione è quella operazione per la quale dato un prodotto ed uno de' suoi fattori, si cerca l'altro fattore.

2.^o La divisione è quella operazione per la quale si cerca quante volte un numero è contenuto in un altro.

3.^o La divisione è quella operazione per la quale si cerca di decomporre un numero dato in tante parti uguali, quante unità si contengono in un altro numero dato.

Nella divisione di 64 per 16 il quoziente 4 può avere perciò tre significati: 1.^o esso è l'altro fattore di 64 che si cercava: 2.^o esso dinota il numero delle volte che il 16 è contenuto nel 64: 3.^o esso è una delle sedici parti eguali in cui si è diviso il 64. È interessante di ben comprendere questi tre oggetti della divisione per ciò che dovrà dirsi in seguito.

Ciò permesso, si distinguono tre casi nella divisione cioè,

1.^o Quando il divisore è di una sola cifra, ed il dividendo è minore del decuplo del divisore, ossia del divisore seguito da uno zero.

2.^o Quando il dividendo è di più cifre ed il divisore è di una sola cifra.

3.^o Quando il dividendo ed il divisore sono due numeri di più cifre.

Nel primo caso è evidente che il quoziente non potrà essere maggiore di 9, e perciò la divisione si eseguirà per mezzo della tavola di Pitagora, cercando qual'è quel numero che moltiplicato pel divisore dia il dividendo. Così dovendo dividersi 40 per 8, si vede che il quoziente è 5, perchè 5 è quel numero che moltiplicato per 8 dà per prodotto 40. Ma spesso non si trova nella tavola di Pitagora un numero che moltiplicato pel divisore dia esattamente il dividendo, come per esempio se dovesse dividersi 47 per 8; perocchè 5 moltiplicato per 8 darebbe 40, minore del dividendo proposto, e 6 moltiplicato per 8 darebbe 48, maggiore del dividendo medesimo. Ciò dimostra che vi sono alcuni numeri che non possono dividersi esattamente per altri. Allora il dividendo è composto di un prodotto esatto del divisore per un altro numero, e di un resto minore del divisore. Il 47 per esempio contiene il numero 40, prodotto esatto di 8 per 5, ed il resto 7 minore del divisore 8.

Nel secondo caso della divisione, sia da dividersi 1068 per 4. L'operazione da eseguirsi sarà quella di trovare un numero tale che moltiplicando le sue unità, decine, centinaia ec. per 4, e sommando i prodotti, si ottenga il dividendo 1068, giacchè il dividendo 1068 si considera come un prodotto, del quale si conosce il fattore 4, e si cerca l'altro fattore.

Cominciamo ad osservare che il quoziente non può contenere

migliaja, poichè se contenesse un solo migliajo, questo moltiplicato per 4 darebbe un prodotto maggiore del dividendo. Il quoziente potendo contenere centinaja, sarà dunque un numero di tre cifre, onde per ciò che si è detto, il dividendo 1068 dovrà contenere tre prodotti, cioè cominciando dalla sinistra conterrà,

1.º il prodotto delle centinaja del quoziente per 4,

2.º il prodotto delle decine del quoziente per 4,

3.º il prodotto delle unità del quoziente per 4.

Ed è chiaro che questi tre prodotti dovranno trovarsi rispettivamente nelle centinaja, nelle decine, e nelle unità del dividendo.

Separiamo con un puntino le centinaja del dividendo; il numero 10 di queste centinaja dovrà contenere il primo prodotto, e cercando nella tavola di Pitagora il numero che moltiplicato per 4 dà un prodotto prossimo al 10, si trova 2, e questa cifra esprimerà le centinaja del quoziente. Il primo prodotto delle centinaja del quoziente per 4 è dunque 8, e tolto dal 10, non resteranno nel dividendo che gli altri due prodotti. Le due centinaja che rimangono dalla prima sottrazione appartengono al secondo prodotto, il quale dovrà trovarsi nel numero 26 composto del resto 2, e della cifra delle decine 6, ossia di 26 decine. Cercando nella tavola di Pitagora il numero che moltiplicato per 4 dà un prodotto prossimo al 26, si trova 6, e questa sarà la cifra delle decine del quoziente. Il secondo prodotto delle decine del quoziente per 4 sarà dunque 24 che tolto dal 26, dà un resto 2 che appartiene al terzo prodotto. Questo terzo prodotto dovrà trovarsi nel numero 28 formato dal resto 2 delle decine, e dalle unità del dividendo; e nella tavola di Pitagora si troverà che il numero 7 è quello che moltiplicato pel divisore 4 dà per terzo prodotto 28, il quale si toglierà dall'ultima parte del dividendo 28, e la divisione sarà terminata, essendosi esaurito il dividendo.

$$\begin{array}{r}
 10 \cdot 68 \\
 \underline{8} \\
 26 \\
 \underline{24} \\
 28 \\
 \underline{28} \\
 00
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \hline
 267
 \end{array}$$

Si vede chiaramente che in tutta l'operazione ora descritta non si è fatto altro che scomporre il dividendo, o prodotto dato in tre prodotti parziali formati dal divisore moltiplicato per ciascuna cifra del quoziente. I tre prodotti parziali sono stati 8 centinaja, 24 decine e 28 unità, che sommati insieme danno il dividendo,

$$\begin{array}{r}
 8 \\
 24 \\
 28 \\
 \hline
 1068
 \end{array}$$

e sono quelli stessi, ma scritti in ordine inverso, che risultano dalla moltiplicazione del quoziente 267 per 4, come si è osservato parlando della moltiplicazione,

$$\begin{array}{r} 267 \\ 4 \\ \hline 28 \\ 24 \\ 8 \\ \hline 1068. \end{array}$$

Si distinguono nella divisione i dividendi parziali, ed i prodotti parziali come qui appresso

	<i>Dividendo</i>	<i>Divisore</i>
1.° <i>Dividendo parziale</i>	1068	4
1.° <i>Prodotto parziale</i>	8	267 <i>quoziente</i>
2.° <i>Dividendo parziale</i>	26	
2.° <i>Prodotto parziale</i>	24	
3.° <i>Dividendo parziale</i>	28	
3.° <i>Prodotto parziale</i>	28	
<i>Resto . . .</i>	00	

Quando un dividendo parziale risulta minore del divisore, la divisione non può eseguirsi, ed è questo un indizio che il quoziente non contiene alcuna unità di quella classe; si scrive allora uno zero nel quoziente per non alterare il numero delle cifre che deve contenere, e si cala subito un'altra cifra per formare un nuovo dividendo parziale e continuare la divisione, come nell'esempio seguente.

1.° <i>Dividendo parziale</i>	1612	4
1.° <i>Prodotto parziale</i>	16	403
2.° e 3.° <i>Dividendo parz.</i>	12	
3.° <i>Prodotto parziale</i>	12	
<i>Resto</i>	00	

Il terzo caso della divisione non presenta ora alcuna difficoltà. Sia da dividersi il numero 115132 per 428. Dovrà trovarsi un numero tale che le sue unità, decine, centinaja ec. moltiplicate per 428 diano altrettanti prodotti parziali, di cui la somma eguagli il dividendo proposto 115132.

Primieramente il quoziente non potrà contenere migliaia, ma sole centinaja, e perciò sarà composto di tre cifre, onde il dividendo, che deve risultare dalla moltiplicazione del divisore pel quoziente dovrà contenere tre prodotti parziali i quali saranno,

- 1.° il prodotto delle centinaja del quoziente per 428,
- 2.° il prodotto delle decine del quoziente per 428,
- 3.° il prodotto delle unità del quoziente per 428.

Separiamo con un puntino le prime quattro cifre del dividendo che esprimono centinaia, ed avremo 1151. Questo primo dividendo parziale dovrà contenere il primo prodotto parziale di cui ora si è parlato, e cercando quel numero che moltiplicato per 428 dà un prodotto il più prossimo a 1151, si trova che un tal numero è 2, il quale indicherà le centinaia del quoziente. Tolto il primo prodotto parziale 856 dal primo dividendo parziale, al resto 295 si aggiungono a fianco le decine 3 che contiene il dividendo e si forma il secondo dividendo parziale 2953, che deve contenere il secondo prodotto parziale. Si cerchi quel numero che moltiplicato per 428 dà un prodotto prossimo a 2953, e si troverà 6, il quale esprimerà le decine del quoziente. Dal secondo dividendo parziale tolto il secondo prodotto parziale 2568 si avrà per resto 385 al quale aggiunte le unità 2 del dividendo, si avrà il terzo ed ultimo dividendo parziale che dovrà contenere l'ultimo prodotto parziale. Il numero 9 che moltiplicato per 428 dà un prodotto 3852 eguale all'ultimo dividendo parziale, rappresenterà le unità del quoziente, e fatta la sottrazione, si avrà un resto zero, e l'operazione sarà terminata.

In questa operazione il dividendo è stato decomposto ne' tre prodotti parziali 856 centinaia, 2568 decine, e 3852 unità, i quali sommati insieme riproducono lo stesso dividendo, e sono quei medesimi prodotti parziali che risultano dalla moltiplicazione del quoziente 269 pel divisore 428, come si osserva qui appresso.

1151.32	428	428 Divisore
856	269	269 Quoziente
2953		3852
2568		2568
3852		856
3852		115132 Dividendo
0000		

Per trovare, come di sopra occorre, la cifra del quoziente che moltiplicata per 428 dia il prodotto più prossimo ad uno de' dividendi parziali, devono farsi varii tentativi, considerando una dopo l'altra le cifre del divisore. Per esempio sia da trovarsi il numero che moltiplicato per 428 dà il prodotto più prossimo a 2953. Questa operazione equivale all'altra di cercare quante volte il 428 è contenuto nel 2953, onde si dirà; la prima cifra 2 del dividendo non può contenere la prima cifra 4 del divisore, per cui dovranno prendersi le prime due cifre 29, le quali conterranno il 4 sette volte con un resto 1. Questo numero seguito dalla terza cifra 5 del dividendo dà 15, che contiene anche sette volte la seconda cifra 2 del divisore con un resto 1; ma, posta a fianco a questo resto l'ultima cifra 3 del dividendo, si ottiene 13, che contiene una volta soltanto l'ultima cifra 8 del divisore. Tutto

il divisore non può dunque esser contenuto *sette* volte nel dividendo, e però si dovrà ribassare a 6 il quoziente 7 ottenuto dal primo saggio. Quindi si replicherà: le prime due cifre 29 del dividendo contengono 6 volte la prima cifra 4 del divisore con un resto 5; questo numero seguito dalla terza cifra 5 del dividendo dà 55, che contenendo più di nove volte la seconda cifra 2 del divisore, ci avverte che tutto il divisore può benissimo esser contenuto *sei* volte nel dividendo, onde la cifra cercata sarà 6. La viva voce del maestro farà meglio comprendere questa specie di esercizio, senza che sia necessario di entrare in più minuti particolari. Solo faremo osservare che in generale, quando il primo dividendo parziale ha lo stesso numero di cifre del divisore, il quoziente ha un numero di cifre che eccede di un' unità la differenza fra i numeri delle cifre del dividendo e del divisore, ed ha poi un numero di cifre eguale a quella differenza allorchè il primo dividendo parziale contiene una cifra di più del divisore.

La divisione si abbrevia, praticando simultaneamente la moltiplicazione di ciascuna cifra del divisore per quella segnata nel quoziente e la sottrazione del prodotto dal dividendo. Riprendiamo l'esempio superiore,

$$\begin{array}{r}
 1151 \ 3 \ 2 \\
 29 \ 5 \ 3 \\
 38 \ 5 \ 2 \\
 \hline
 0 \ 0 \ 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 428 \\
 \hline
 269
 \end{array}$$

Si deve primieramente sottrarre il prodotto 2 per 8, ossia 16, da 1, e siccome non si può, si toglie da 21, aumentando il sottraendo di 2 decine, e si segna 5 di resto; ma per compensare le 2 decine aggiunte, o bisogna toglierle dal 5 del dividendo, ovvero; come sempre si fa, riportarle al prodotto seguente: si dica dunque 2 per 2 fan 4, e 2 che si riportano son 6, che tolti dal 15, danno 9 di resto, ed una decina si riporta: 2 per 4 fanno 8 ed 1 che si riporta sono 9, e tolti da 11, rimane 2. Si procede similmente con le cifre 6 e 9. Adunque *per sottrarre dal dividendo il prodotto della cifra segnata nel quoziente per una delle cifre del divisore si aumenterà, se occorre, la cifra del dividendo di tante decine quante bisognano, badando di riportarle al prodotto seguente.*

La divisione si abbrevia ancora quando il dividendo ed il divisore sono terminati da zeri, potendo togliersi un egual numero di zeri tanto dall'uno quanto dall'altro, senza che il quoziente ne rimanga alterato; perocchè il numero delle volte che il divisore è contenuto nel dividendo è lo stesso, quantunque l'uno e l'altro siano divenuti 10 volte, 100 volte etc. minori di quello che erano. Così 4 è contenuto 9 volte in 36, nello stesso modo che 40 è contenuto 9 volte in 360, e 400, 9 volte in 3600.

Finalmente, se il divisore è eguale al dividendo, si avrà per

quoziente l'unità. In fatti qualunque numero non può esser contenuto più di una volta in altro numero che lo pareggia; così 4 è contenuto una volta in 4, e 1000 è contenuto una volta in 1000 etc. Se poi il divisore è eguale all'unità di quoziente sarà lo stesso del dividendo, perchè un quoziente diverso moltiplicato pel divisore 1 non riprodurrebbe il dividendo. Queste due proprietà sogliono enunciarsi nel seguente modo; *ogni numero diviso per se stesso è eguale all'unità, ed ogni numero diviso per l'unità è eguale a se stesso*. E siccome si è veduto pure che qualunque numero moltiplicato per l'unità non cambia di valore, perciò suole anche dirsi che, *l'unità non moltiplica nè divide*, cioè che qualunque numero moltiplicato o diviso per 1 rimane lo stesso.

§. 10.

Ripruova della moltiplicazione e della divisione.

La moltiplicazione e la divisione sono due operazioni che servono scambievolmente una di ripruova all'altra. Per provare l'esattezza di una moltiplicazione, si divide il prodotto per uno de' fattori, e deve ottenersi l'altro fattore; se ciò non si verifica l'operazione è errata. Al contrario per verificare una divisione, siccome il dividendo corrisponde ad un prodotto di cui i fattori sono il divisore ed il quoziente, si moltiplicano questi due numeri fra loro, e deve ottenersi il dividendo; se ciò non si verifica l'operazione è errata. Quando però la divisione ha un resto, allora il dividendo non è il prodotto esatto del divisore pel quoziente, e perciò a questo prodotto deve aggiungersi il resto per ottenere il dividendo, come si è già osservato parlando del primo caso della divisione (§. 9). Quindi in generale *il dividendo si otterrà aggiungendo al prodotto del divisore pel quoziente il resto della divisione*.

Ma la moltiplicazione e la divisione sono operazioni troppo complicate perchè la ripruova accennata di una di esse per mezzo dell'altra possa effettuarsi con molta utilità, e spesso avviene che l'operazione proposta riesce esatta, e si commette l'errore nell'operazione di verifica, per cui si perde molto tempo a cercarlo in ambedue. Quindi si preferisce la seguente ripruova detta *del nove*, la quale, quantunque possa esser fallace in qualche raro caso, pure per l'estrema sua facilità è utilissima nel calcolo numerico (*). Essa si comprenderà più facilmente applicandola ad un esempio.

La moltiplicazione de' due numeri 428, e 269 ha dato il pro-

(*) *Calcolare* i numeri significa eseguire su i medesimi qualcheduna delle operazioni sinora esposte, o di quelle che si esporranno in seguito.

dotto 115132, e si vuol provare se l'operazione è ben fatta. Si dividano tanto il moltiplicando che il moltiplicatore per 9, e si notino i resti delle divisioni, che saranno, 5 ed 8. Moltiplicando fra loro questi due numeri, e dividendo di nuovo per 9 il prodotto 40, si avrà un altro resto 4, il quale, se la moltiplicazione de' proposti numeri 426 e 269 è ben fatta, dovrà eguagliare quello che si ottiene dividendo per 9 il loro prodotto 115132; come in fatti accade. Nel §. 17 si darà ragione di questa regola, e si dimostrerà pure che, per conoscere il resto della divisione di un numero qualunque per 9, basta sommare le sue cifre significative e dividere la somma per 9, ovvero togliere quante volte si può il 9 dalla somma medesima. Perciò la riprova del 9 applicata all'esempio in discorso potrà enunciarsi come segue.

Sommate le cifre 4, 2, ed 8 del moltiplicando, e dalla somma 14 ottenuta togliete quante volte si può il 9; scrivete indi il resto 5 in un angolo della crocetta segnata per render più chiaro il procedimento della riprova. Fate lo stesso con le cifre del moltiplicatore, e scrivete il resto 8 in un altro angolo della
$$\begin{array}{r} 5 \mid 4 \\ 8 \mid 4 \end{array}$$
crocce. Moltiplicate fra loro i due resti 5 ed 8, e dal prodotto 40 togliete quante volte si può il 9; scrivete il nuovo resto 4 nel terzo angolo della crocetta. Se l'operazione è ben fatta, dovrà aversi lo stesso resto 4 togliendo quante volte si può il 9 dalla somma delle cifre 1, 1, 5, 1, 3 e 2 del prodotto; il che appunto si verifica, come si vede notato nel quarto angolo della crocetta.

Relativamente alla divisione, debba verificarsi quella del numero 115174 per 428, la quale ha dato un quoziente 269 con un residuo 42. *Togliete quante volte si può il 9 dalla somma delle cifre del divisore, e notate il resto 5 in un angolo della crocetta; fate lo stesso col quoziente 269, e registrate*
$$\begin{array}{r} 5 \mid 1 \\ 8 \mid 1 \end{array}$$
il resto 8 in un altro angolo. Moltiplicate fra loro i due resti ad aggiungete al prodotto 40 ottenuto la somma delle cifre del residuo 42 della divisione. Togliete quante volte si può il 9 dalla somma totale 46, ed il nuovo resto 1 dovrà, se l'operazione è ben fatta, riuscir lo stesso di quello che si ottiene dal dividendo 115174, togliendo quante volte si può il 9 dalla somma delle sue cifre; come nel fatto si verifica.

Si avverte che quando nel sommare le cifre di un numero qualunque s'incontrassero dei 9, potranno tralasciarsi per brevità, giacchè includendoli, dovrebbero poi togliersi dalla somma ottenuta; ed inoltre che per togliere quante volte si può il 9 da una tal somma, potrà adoperarsi la stessa regola di sommare le cifre del numero che la rappresenta. Così essendo dato il numero 7896589766, la somma delle sue cifre, esclusi i 9, sarà 53, e per togliere quante volte si può il 9 da questo numero, si sommeranno le sue cifre e si avrà 8, che sarà il resto cercato.

La riprova del 9 è fallace se lo abaglio commesso consiste nell'aver posti di più, o tralasciati nel prodotto o nel quoziente cercato de' 9 o degli zeri, oppure nell'aver fatte alcune cifre di tanto maggiori delle esatte, quanto altre ne sono minori.

DELLE FRAZIONI IN GENERALE.

§. 11.

Di alcuni segni de' quali si fa uso nell'Algebra.

Promettiamo la conoscenza di alcuni segni de' quali si fa uso nell'*Algebra* per rendere più breve il discorso, perchè ci tornerà comodo adoperarli qualche volta d'ora innanzi.

Il segno $+$ indica addizione e si pronunzia *più*. Così $4 + 7$ si legge *quattro più sette*, e rappresenta la somma de' due numeri 4 e 7, per cui vale lo stesso che 11. Similmente $4 + 7 + 9$ si legge *quattro più sette più nove*, e rappresenta la somma de' tre numeri 4, 7, e 9, ossia vale lo stesso che 20.

Il segno $-$ indica sottrazione, e si pronunzia *meno*;

$8 - 4$ si legge *otto meno quattro*, e rappresenta il resto della sottrazione del numero 4 dall'8, ossia la differenza fra i due numeri 8 e 4, per cui equivale a 4.

Il segno $\times$, o anche un semplice punto ., indica moltiplicazione, e si pronunzia *moltiplicato per*;

8×4 , oppure $8 . 4$ si legge *otto moltiplicato per quattro*, e rappresenta il prodotto de' due numeri 8 e 4, per cui equivale a 32.

$\frac{8}{4}$, oppure $8 : 4$ si pronunzia *otto diviso per quattro*, e rappresenta il quoziente della divisione 8 per 4, onde equivale a 2.

Il segno $=$ dinota *eguaglianza*. L'uso di questo segno si può scorgere chiaramente nelle seguenti espressioni,

$$4 + 7 + 9 = 20$$

$$8 - 4 = 4$$

$$8 \times 4 = 32$$

$$8 : 4 = 2$$

le quali dipendono dalle cose dette di sopra.

Il segno $>$ indica *maggioranza*. Così $8 > 4$ dinota che 8 è maggiore di 4, e si pronunzia *otto maggiore quattro*.

Il segno $<$ indica *minoranza*. Per esempio $4 < 8$, si pronunzia *quattro minore otto*.

I segni di cui ora si è parlato possono combinarsi insieme per indicare più operazioni successive da eseguirsi sopra alcuni numeri. Così,

$$5 \times 4 + 2 - 3$$

indica che il 5 deve moltiplicarsi per 4, al prodotto deve aggiungersi 2, e dalla somma ottenuta deve togliersi 3. Eseguito

tutte queste operazioni, si ha per ultimo risultamento 19, per cui può stabilirsi l'eguaglianza,

$$5 \times 4 + 2 - 3 = 19.$$

§. 12.

Origine delle frazioni.

Le frazioni hanno origine dal resto della divisione. Sia da dividersi il numero 65 per 4. Questa operazione consiste nel dividere il numero 65 in quattro parti eguali (§. 9). Il quoziente è 16; ma questo numero non è contenuto quattro volte esattamente nel 65, o come suol dirsi, non è l'esatta *quarta parte* di 65, poichè vi rimane un'unità ancora da dividersi in quattro parti eguali.

$$\begin{array}{r} 65 \\ 4 \overline{) 65} \\ \underline{25} \\ 24 \\ \underline{24} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 16 \end{array}$$

Resto. . . . 1

Immaginando eseguita la divisione di questa unità in quattro parti eguali, una di esse parti, ossia la *quarta parte* dell'unità si scrive così, $\frac{1}{4}$; ed i numeri 4 ed 1 separati da una piccola linea, indicano che l'unità si è divisa in quattro parti eguali, e di queste parti se n'è presa una. L'espressione $\frac{1}{4}$, che si pronunzia *un quarto*, dicesi *frazione*, ed aggiunta al quoziente 16, dà 16 $\frac{1}{4}$, che rappresenta l'esatta quarta parte di 65.

Dovendo dividersi 66 per 4, il resto sarà 2, e dovrà trovarsi la quarta parte di questo numero per aggiungerla al quoziente 16, e renderlo completo. Per dividere il 2 in quattro parti eguali, riflettiamo che questo numero contiene due unità, e perciò si dovrà supporre ognuna di queste unità divisa in quattro parti eguali, e prendere da ciascuna unità una delle quattro parti che contiene. Così la quarta parte del 2 sarà composta di $\frac{1}{4}$ di unità più $\frac{1}{4}$ di unità, ossia di *due quarti* di unità, che si scrivono $\frac{2}{4}$.

Se dovesse prendersi la quarta parte di 3, si vedrebbe similmente che essa è composta di $\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{4}$ dell'unità, ossia di tre quarti dell'unità, che si scrivono, $\frac{3}{4}$. Dunque può conchiudersi che le espressioni $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, hanno due significati; indicano cioè la quarta parte de' numeri 2, e 3, ed indicano pure che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali, e di queste parti se ne sono prese due o tre.

Fin qui abbiamo considerato soltanto le frazioni che nascono dall'unità divisa in quattro parti, perchè il divisore della divisione proposta era 4, ed in quattro parti doveva dividersi il resto.

Ma si cambi il divisore, e sia per esempio 3; la divisione sarà la seguente,

$$\begin{array}{r} 65 \\ 6 \overline{) 65} \\ \underline{6} \\ 5 \\ 3 \overline{) 5} \\ \underline{3} \end{array}$$

Resto. . . . 2

Si dovrà ora dividere il resto 2 in tre parti eguali, ed aggiungere una delle tre parti, ossia la *terza parte* di 2 al quoziente. Questa operazione si eseguirà immaginando divisa in tre parti eguali ognuna delle unità contenute nel 2, e prendendo una parte da ciascuna unità. La frazione che ne nasce si scrive, $\frac{2}{3}$, e si pronunzia *due terzi*; essa rappresenta la *terza parte* di 2, ed indica pure che l'unità è stata divisa in tre parti eguali, delle quali se ne sono prese due. È interessante di ben comprendere questo doppio significato delle frazioni per ciò che deve dirsi in seguito.

Il precedente ragionamento potendo applicarsi ad un'altra qualunque divisione dell'unità in cinque, sei, sette etc. parti eguali, sarà facile comprendere il significato di qualsivoglia frazione. Così la frazione $\frac{4}{5}$ indica l'unità divisa in cinque parti eguali delle quali se ne sono prese quattro, e rappresenta anche una delle cinque parti eguali in cui si è diviso il numero 4, ossia la *quinta parte* di 4; la frazione $\frac{5}{7}$ indica l'unità divisa in sette parti eguali delle quali se ne sono prese cinque, etc. etc.

Le frazioni prendono diversi nomi secondochè diverso è il numero delle parti in cui si suppone divisa l'unità. Le frazioni che risultano dalla divisione dell'unità in due parti si chiamano *mezzi*,

in 3 parti, si chiamano	<i>terzi</i>
in 4 parti.....	<i>quarti</i>
in 5 parti.....	<i>quinti</i>
in 6 parti.....	<i>sesti</i>
in 7 parti.....	<i>settimi</i>
in 8 parti.....	<i>ottavi</i>
in 9 parti.....	<i>noni</i>
in 10 parti.....	<i>decimi</i>
in 11 parti.....	<i>undicesimi</i>
in 12 parti.....	<i>dodicesimi</i>
etc. etc.	

La terminazione in *esimi* vale per tutte le altre divisioni dell'unità all'infinito.

La divisione, o la scomposizione dell'unità in parti eguali, si può immaginare soltanto, quando si considera l'unità astratta, ma non può effettuarsi; se però all'unità si dia un valore concreto, potrà allora eseguirsi col fatto quella scomposizione, e sarà facile ancora assegnare il valore di una frazione qualunque del-

l'unità medesima. Per esempio se l'unità fosse una canna di stoffa, potrebbe prendersene effettivamente la quarta parte, dividendo in quattro parti eguali quella stoffa nella sua lunghezza, e staccandone una parte. Se l'unità fosse una moneta, come un ducato che vale 100 grana, e volesse conoscersi quante grana vale la frazione $\frac{1}{4}$ del ducato stesso, si ragionerebbe così. La frazione $\frac{1}{4}$ dinota che il ducato deve dividersi in quattro parti eguali e devono prendersi tre di quelle parti; dunque bisogna prima di tutto trovare la quarta parte del ducato, e questa si otterrà dividendo 100 grana per 4, che dà per quoziente 25 grana. Indi questa quarta parte si replicherà tre volte, e si avrà 75, onde si dirà che $\frac{3}{4}$ di un ducato valgono 75 grana. Avrebbe potuto anche farsi in un altro modo. Si sa che la frazione $\frac{1}{4}$ rappresenta pure la quarta parte di 3, ossia una delle quattro parti eguali nelle quali si suppone diviso il numero 3, e quindi prendere tre quarti di un ducato è lo stesso che prendere un quarto di tre ducati. E poichè tre ducati valgono 300 grana, dividendo questo numero per 4 si ottiene per quoziente 75 come sopra.

Da quanto precede risulta che, *deve intendersi per frazione, una espressione numerica rappresentante una o più parti eguali di quelle in cui si suppone divisa l'unità.*

§. 13.

Cosa significano numeratore, e denominatore, frazione vera, e frazione spuria.

In ogni frazione si considerano, come abbiamo veduto, due numeri. Si chiama *denominatore* il numero inferiore che dinota in quante parti si è divisa l'unità, e *numeratore* l'altro che indica quante parti se ne sono prese. Per esempio nella frazione $\frac{3}{4}$ il denominatore è 4, ed indica che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali, ed il numeratore è 3, ed indica che se ne sono prese tre. Il numeratore ed il denominatore, insieme considerati, si chiamano i *termini* della frazione.

Le frazioni traendo la loro origine dal resto della divisione che è minore del divisore, dovrebbero avere il numeratore sempre minore del denominatore, ed essere perciò sempre minori dell'unità. Ma ritengono il nome di frazione anche quelle che hanno il numeratore eguale o maggiore del denominatore. Le medesime si chiamano però frazioni *spurie* per distinguerle dalle prime che diconsi frazioni *vere*, o *legittime*.

Una frazione qualunque che ha il numeratore eguale al denominatore, per poco che si esamini il suo significato, si troverà sempre eguale all'unità. Per esempio $\frac{4}{4}$ significa che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali delle quali se ne sono prese quattro, cioè si sono prese tutte, e per conseguenza il valore

della frazione è la stessa unità. Ciò vien confermato ancora dall'osservazione che la frazione $\frac{1}{4}$ rappresenta la quarta parte di 4, e questa quarta parte si ottiene dividendo 4 per 4 (§. 9), la quale divisione dà per quoziente l'unità. Lo stesso ragionamento potrebbe applicarsi alle frazioni $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ etc., onde in generale ciascuna delle frazioni seguenti può considerarsi come l'espressione dell'unità,

$$\frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \frac{6}{24}, \frac{7}{28}, \frac{8}{32}, \frac{9}{36}, \frac{10}{40} \text{ etc.}$$

Le frazioni spurie che hanno il numeratore maggiore del denominatore sono maggiori dell'unità. Per esempio nella frazione $\frac{5}{4}$, il denominatore dinota che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali; e siccome di queste parti non se ne possono prendere più di quattro, così essendo il numeratore 5 maggiore di 4, bisogna supporre che due unità siano state divise ognuna in quattro parti eguali, e per formare la frazione $\frac{5}{4}$ si siano prese tutte le parti della prima unità, ed una delle parti della seconda. La frazione $\frac{5}{4}$ è dunque maggiore dell'unità, e questa conseguenza si desume ancora dal riflettere che $\frac{5}{4}$ rappresenta la quarta parte di 5, la quale si ottiene dalla divisione di 5 per 4, che dà per quoziente $1 \frac{1}{4}$ (§. 9, e §. 12). Così pure la frazione $\frac{8}{4}$ rappresenta la quarta parte di 8, la quale si ottiene con la divisione di 8 per 4, che dà per quoziente 2; e quindi la frazione $\frac{8}{4}$ è la stessa cosa dell'intero 2.

Da ciò possiamo ancora stabilire che, *una frazione qualunque non è altra cosa che una divisione accennata e non eseguita, nella quale il dividendo è rappresentato dal numeratore della frazione, ed il divisore dal denominatore. Per le frazioni vere la divisione non può eseguirsi e rimane indicata, e per le frazioni spurie, se si esegue, la frazione si cambia in un intero, o in un intero unito ad una frazione.*

§. 14.

Cambiamenti che si operano in una frazione, accrescendo o diminuendo, moltiplicando o dividendo uno de' suoi termini.

Accrescendo il numeratore di una frazione senza alterare il suo denominatore si accresce la frazione, poichè si prende un numero maggiore di parti dell'unità, e diminuendo il numeratore si diminuisce la frazione, perchè se ne prende un numero minore. Così $\frac{3}{4}$ è maggiore di $\frac{2}{4}$, perchè delle quattro parti eguali in cui è divisa l'unità se ne prendono tre in vece di due, ed $\frac{1}{4}$ è minore di $\frac{2}{4}$, perchè si prende una sola parte delle quattro in cui è divisa l'unità in vece di prenderne due.

Nello stesso modo raddoppiando il numeratore si raddoppia la frazione, perchè si prende un numero doppio di parti dell'uni-

tà, triplicando il numeratore si triplica la frazione etc. Per esempio le frazioni $\frac{4}{10}$ o $\frac{6}{10}$ sono la prima doppia, e la seconda tripla di $\frac{2}{10}$. Viceversa prendendo la metà del numeratore, si prende la metà della frazione, prendendone la terza parte, si prende la terza parte della frazione etc., perchè di un dato numero di parti dell'unità si prende la metà o la terza parte. Così la frazione $\frac{2}{10}$ è metà di $\frac{4}{10}$, come il numeratore 2 è metà del numeratore 4, e similmente $\frac{2}{10}$ è terza parte di $\frac{6}{10}$, come 2 è terza parte di 6 etc. Dunque in generale, *moltiplicando* il numeratore di una frazione per 2, per 3, o per qualunque altro numero, la frazione rimane *moltiplicata* per lo stesso numero; *dividendo* il numeratore, la frazione rimane *divisa*.

L'opposto accade rispetto al denominatore delle frazioni. Accrescendo il denominatore di una frazione, e non alterando il suo numeratore, si diminuisce la frazione, perchè accrescendo il denominatore si accresce il numero delle parti eguali in cui è divisa l'unità, onde ciascuna parte diviene più piccola; e diminuendo il denominatore, si diminuisce il numero delle parti in cui è divisa l'unità, e ciascuna parte diviene più grande. Per esempio debba dividersi un ducato in quattro parti eguali, ovvero a quattro persone; spetterà a ciascuna persona la frazione $\frac{1}{4}$ di ducato, e siccome il ducato è composto di 100 grana, spetteranno a ciascuno 25 grana. Debba poi dividersi il ducato in cinque parti eguali, o a cinque persone; la porzione di ciascuno sarà $\frac{1}{5}$ di ducato, ovvero 20 grana. Crescendo dunque il numero delle parti in cui si è divisa l'unità, è divenuto più piccolo il valore di ciascuna parte. La frazione $\frac{1}{5}$ è minore di $\frac{1}{4}$, ed in conseguenza anche $\frac{2}{5}$ è minore di $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$ è minore di $\frac{3}{4}$ ec., poichè le frazioni $\frac{2}{5}$, e $\frac{3}{5}$ non sono che $\frac{2}{4}$ preso più volte, e tali sono ancora le frazioni $\frac{2}{4}$, e $\frac{3}{4}$ rispetto ad $\frac{1}{4}$.

Raddoppiando il denominatore di una frazione, si raddoppia il numero delle parti in cui è divisa l'unità, onde il valore di ciascuna parte diviene metà di quello che era prima, e quindi tutta la frazione rimane divisa per metà. Per esempio, se debba distribuirsi un tomolo di grano a tre persone, siccome il tomolo è composto di 24 misure, spetterà a ciascuna persona $\frac{1}{3}$ di tomolo, ossia 8 misure di grano; ma se il tomolo di grano dovrà distribuirsi a sei persone, allora spetterà a ciascuno la frazione $\frac{1}{6}$ di tomolo, ossia 4 misure di grano soltanto. La frazione $\frac{1}{6}$ è dunque metà di $\frac{1}{3}$, mentre il denominatore 6 è doppio del denominatore 3. In conseguenza anche $\frac{2}{6}$ è metà di $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{6}$ è metà di $\frac{3}{3}$. Triplicando il denominatore, la frazione diviene la terza parte di quello che era prima. Così $\frac{1}{9}$ è la terza parte di $\frac{1}{3}$, come risulta pure dall'esempio proposto, giacchè $\frac{1}{9}$ di tomolo vale 4 misure, mentre $\frac{1}{3}$ vale 8 misure. Dunque in generale *moltiplicando* il denominatore di una frazione per un certo numero, si viene a *dividere* la frazione per lo stesso numero.

Viceversa dividendo il denominatore di una frazione per 2, per 3, per 4 etc. la frazione rimane moltiplicata per quel numero, perchè il valore di ciascuna parte dell'unità viene con ciò a raddoppiarsi, triplicarsi, quadruplicarsi etc., e l'esempio precedente potrà anche servire a renderlo manifesto.

Dopo di ciò rimane dimostrata la seguente tavola;

Moltiplicando } *il numeratore* { *si moltiplica* } *la frazione*
Dividendo } { *si divide* }

Moltiplicando } *il denominatore* { *si divide* } *la frazione.*
Dividendo } { *si moltiplica* }

§. 15.

Non si altera il valore di una frazione se si moltiplicano, o si dividono i suoi termini per un medesimo numero.

Si abbia per esempio la frazione $\frac{4}{8}$. Moltiplicando per 2 ossia raddoppiando il suo numeratore, si raddoppia la frazione (§. 14), e perciò la frazione $\frac{8}{8}$ è doppia della frazione $\frac{4}{8}$, ed al contrario $\frac{4}{8}$ è metà di $\frac{8}{8}$. Moltiplicando per 2 il denominatore della frazione $\frac{4}{8}$, si divide per metà questa frazione (§. 14.), onde la nuova frazione $\frac{4}{16}$ è metà di $\frac{4}{8}$. Ma $\frac{4}{8}$ è pure metà di $\frac{8}{8}$, dunque $\frac{4}{8}$, ed $\frac{4}{16}$ sono la stessa cosa; e ciò è avvenuto perchè la frazione $\frac{4}{8}$ si è prima moltiplicata, e poi si è divisa per lo stesso numero 2, per cui il suo valore è rimasto inalterato, e solo la sua forma è cambiata.

Un simile risultamento si otterrebbe moltiplicando i due termini della frazione per qualunque altro numero. Così $\frac{4}{8}$ è la stessa cosa di $\frac{1}{2}$, e di $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ etc.

Dividendo il numeratore ed il denominatore di una frazione per lo stesso numero, il valore di essa neppure si altera, e ciò può dimostrarsi in un modo analogo al precedente.

Dividiamo per 4 il numeratore della frazione $\frac{4}{8}$, e la tavola del §. 14 ci permetterà di stabilire che,

$\frac{1}{8}$ è quarta parte di $\frac{4}{8}$; e quindi
 $\frac{1}{8}$ è quadrupla di $\frac{1}{32}$.

Dividiamo per 4 il denominatore della frazione $\frac{4}{8}$, e per la stessa tavola avremo che,

$\frac{4}{32}$ è quadrupla di $\frac{1}{8}$.

Dunque tanto $\frac{1}{8}$ che $\frac{4}{32}$ sono quadruple di $\frac{1}{32}$, e perciò sono eguali fra loro.

§. 16.

Modo di ridurre una frazione a più semplice espressione.

Per ciò che precede una frazione può avere infinite forme diverse, conservando lo stesso valore: per esempio,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}, \frac{11}{22}, \frac{12}{24} \text{ etc.}$$

sono frazioni che hanno tutte lo stesso valore, ma diversa forma, e si ottengono moltiplicando i termini della frazione $\frac{1}{2}$ per 2, 3, 4 etc., successivamente.

Tra queste frazioni si osserva che la prima ha la forma più semplice di tutte, e che una delle altre si può ridurre alla prima, dividendo i suoi termini per uno stesso numero, la quale operazione non ne altera il valore. Sia data la frazione $\frac{12}{24}$ da ridursi ad una espressione più semplice. Si comincerà a dividerne per 2 il numeratore ed il denominatore, e si avrà $\frac{6}{12}$, si continueranno a dividere per 2 i termini di questa frazione, e si avrà $\frac{3}{6}$, e dividendo per 3 i termini di quest'ultima, si otterrà in fine la frazione $\frac{1}{2}$.

Dunque una frazione si riduce ad espressione più semplice cercando un numero che sia divisore esatto tanto del numeratore che del denominatore, e dividendo i termini della frazione per questo numero. Quanto più grande sarà il comune divisore, la frazione sarà ridotta ad un'espressione più semplice. Così dividendo i termini della frazione $\frac{12}{24}$ per 2, si ha la frazione $\frac{6}{12}$, dividendoli per 4, si ha $\frac{3}{6}$, e finalmente dividendoli per 3 si ha $\frac{1}{2}$.

È chiaro poi che la frazione sarà ridotta alla sua *più semplice espressione* quando fra il suo numeratore ed il suo denominatore non vi sarà alcun divisore comune maggiore dell'unità, poichè se ve ne fosse un altro maggiore, dividendo i termini della frazione per questo numero, la frazione prenderebbe una forma più semplice ancora. Per esempio $\frac{2}{6}$ non è la forma più semplice della frazione $\frac{1}{3}$, poichè fra il numeratore ed il denominatore di $\frac{2}{6}$ vi è il divisore comune 2 pel quale divisi i termini della frazione, si ottiene l'ultima espressione $\frac{1}{3}$.

§. 17.

Regole per conoscere quando un numero è divisibile per 2, per 5, per 3, o per 9.

Per rendere più agevole la riduzione di una frazione alla più semplice espressione, giova dare alcune regole per conoscere a primo aspetto se i suoi termini siano divisibili esattamente per numeri semplici, 2, 5, 3, e 9.

Qualunque numero terminato da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8, è divisibile esattamente per 2, perchè nell'eseguire la divisione, dovendo ogni resto esser minore del divisore, il penultimo resto sarà necessariamente zero, oppure 1; e quindi, calando l'ultima cifra, se il resto è zero, l'ultimo dividendo parziale sarà uno de' numeri 0, 2, 4, 6, 8, e se il resto è 1, sarà 10, 12, 14, 16, 18, i quali numeri sono tutti divisibili per 2. Per esempio debba dividersi 4568 per 2, l'operazione sarà la seguente,

$$\begin{array}{r} 4568 \\ 2 \overline{) 5} \\ 10 \\ 16 \\ 18 \\ 0 \end{array}$$

Ultimo dividendo parziale. 8
0

dove il penultimo resto è stato zero, e l'ultimo dividendo parziale è stato 8, divisibile esattamente per 2.

I numeri divisibili per 2 si chiamano numeri *pari*, perchè possono dividersi esattamente in due parti eguali. Tutti gli altri numeri si dicono *dispari*, o *caffi*. Questi numeri non sono divisibili esattamente per 2, e per nessun altro numero pari.

I numeri che terminano o con zero, o con 5 sono esattamente divisibili per 5; perocchè il penultimo resto della divisione deve essere necessariamente uno de' numeri 0, 1, 2, 3, 4, e perciò l'ultimo dividendo parziale deve essere uno de' numeri 0, 10, 20, 30, 40, oppure 5, 15, 25, 35, 45, i quali numeri sono tutti divisibili per 5. Per esempio dividendo per 5 il numero 585, il penultimo resto della divisione è 3; per conseguenza l'ultimo dividendo parziale è 35, il quale numero è esattamente divisibile per 5.

$$\begin{array}{r} 585 \\ 5 \overline{) 8} \\ 35 \\ 0 \end{array}$$

Se la somma delle cifre significative di cui si compone un numero qualunque è divisibile per 3 o per 9, il numero sarà ancora divisibile per 3, o per 9. Per esempio il numero 58410 è divisibile per 3 e per 9 perchè la somma delle sue cifre è 18, che si divide esattamente per 9. Per dimostrare questa regola si rifletta che dividendo per 3, o per 9 l'unità seguita da uno, o più zeri, si deve avere sempre per resto 1. Infatti il 10 si compone di 9 e di 1, il 100 si compone di 99 e di 1, il 1000 si compone di 999 e di 1, e così di seguito, ed è evidente che i numeri 9, 99, 999 ec. sono esattamente divisibili per 3 o per 9. Ora se i numeri 10, 100, 1000 ec. divisi per 3, o per 9 danno un resto 1, è chiaro che i numeri 20, 200, 2000 ec. daranno un resto 2, e gli altri 30, 300, 3000 ec. un resto 3, e così ogni numero formato da una cifra significativa

seguita da zeri, se si divide per 3 o per 9 darà un resto eguale alla cifra significativa. Per esempio 50000 diviso per 9 deve dare per resto 5.

Dopo di ciò il numero 58410 si suppone decomposto nei numeri,

50000 che diviso per 9 dà per resto 5
 8000 che diviso per 9 dà per resto 8
 400 che diviso per 9 dà per resto 4
 10 che diviso per 9 dà per resto 1 .

Somma de' residui. 18

La somma de' residui delle divisioni parziali è 18, e corrisponde alla somma delle cifre significative. Dunque il numero 58410 diviso per 9 dà per resto la somma delle sue cifre significative, e perciò se questo resto contiene esattamente il 9, il numero proposto sarà esattamente divisibile per 9, come realmente si verifica del numero 58410. Questo numero è anche divisibile per 3, perchè la somma de' residui, 18, è divisibile esattamente per 3. In generale ogni numero divisibile per 9, è anche divisibile per 3, ma spesso un numero divisibile per 3 non è divisibile per 9, e ciò avviene quando la somma de' residui è divisibile per 3 e non per 9.

Da quanto precedo si desume che per ottenere il resto della divisione di un numero qualunque per 9, si sommeranno le sue cifre significative, e se la somma è maggiore di 9, dalla medesima si toglierà quante volte si può questo numero.

Ciò posto, prima di dimostrare la riprova del nove di cui si è parlato nel §. 10, esporremo una importante proprietà della moltiplicazione, che le serve di fondamento.

Moltiplicare un numero qualunque per un altro, per esempio 428 per 269, significa ripetere il 428 duecento sessantanove volte, ed è chiaro che se 428 si considera composto di due parti, come di 423, e di 5, bisognerà ripetere duecento sessantanove volte il 423, e duecento sessantanove volte il 5. Di più, se anche il moltiplicatore 269 si considera composto di due parti, per esempio di 261, e di 8, in vece di ripetere il 423 duecento sessantanove volte, varrà lo stesso ripeterlo prima duecento sessantuno volte, e poi otto volte; e similmente si ripeterà il 5 prima 261 volte e poi 8 volte. Dunque per moltiplicare la somma di due numeri, 423 + 5, per la somma di due altri numeri, 261 + 8, dovrà moltiplicarsi ciascun numero della seconda somma per ciascun numero della prima, e sommare i quattro prodotti ottenuti. Sarà cioè,

$$(423+5) \text{ moltiplicato per } (261+8) = 261 \cdot 423 + 261 \cdot 5 + 8 \cdot 423 + 8 \cdot 5 = 115132.$$

Quando le somme da moltiplicarsi siano composte di più di due numeri, sarà facile persuadersi che il prodotto totale risulterà sempre dall'unione di tutti i prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun numero di una somma per ciascun numero dell'altra.

Ora, se si dividano per 9 i due fattori 428, e 269 della moltiplicazione proposta per esempio, siccome prescrive la suddetta ripruova del nove, si avranno rispettivamente i quozienti 47, e 29, ed i resti 5 ed 8, e poiché aggiungendo al prodotto del quoziente pel divisore il resto della divisione si ottiene il dividendo, sarà

$$428 = 47 \cdot 9 + 5, \text{ e } 269 = 29 \cdot 9 + 8, \text{ ovvero}$$

$$428 = 423 + 5, \quad 269 = 261 + 8.$$

Risulta da queste uguaglianze che, i due numeri 423 e 261, contenendo il 9 come fattore, sono esattamente divisibili per lo stesso. In conseguenza, de' quattro prodotti che compongono il prodotto totale di 428 per 269, i primi tre 261.423, 261.5, ed 8.423, sono esattamente divisibili per 9; e quindi se il suddetto prodotto totale si divida per 9, il resto della divisione non potrà trovarsi in alcuno de' tre prodotti indicati, ma dovrà trovarsi nel quarto prodotto 5.8, che è quello de' residui delle divisioni per 9 de' due numeri 423, e 269. Dunque togliendo quante volte si può il 9 da un tal prodotto, si dovrà avere lo stesso resto che dà la divisione per 9 del prodotto totale 115132, quando quest'ultimo non sia erroneo. Ed in ciò appunto consiste la ripruova del 9: perocchè col sommare le cifre del numero 428 fra loro e toglierne quante volte si può il 9 non si fa che cercare il resto della divisione di 428 per 9, e similmente facendo col 269, si ottengono i residui 5 ed 8, nel prodotto de' quali deve trovarsi il residuo della divisione di 115132 per 9, che si ottiene anche direttamente sommando fra loro le cifre di questo numero e togliendone i 9. Dalla coincidenza de' residui ottenuti ne' due diversi modi si giudica dell'esattezza dell'operazione.

Riflettendo un poco sul tenore della dimostrazione precedente, si vedrà che la ripruova della moltiplicazione potrebbe anche eseguirsi dividendo i fattori ed il prodotto per qualunque altro numero diverso dal 9, ma si è prescelto il 9 per la facilità che offre nell'effettuare le divisioni.

§. 18.

Quali sono i numeri primi, ed i numeri primi fra loro.

Deve inoltre farsi un'altra distinzione importante tra i numeri. Si chiamano *numeri primi* quelli che non hanno alcun divisore esatto all'infuori dell'unità, e di loro stessi. La serie de' numeri primi è la seguente,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc. nella quale qualunque numero, per esempio 29, non può dividersi esattamente che per 1, o per 29.

Si chiamano *numeri primi fra loro* quelli che non hanno nessun divisore comune maggiore dell'unità, sebbene ciascuno di essi non sia numero primo. Per esempio 6 e 25 non sono numeri primi, ma sono primi fra loro, poichè i numeri 2, 3, e 6 che dividono esattamente 6 non dividono esattamente il 25, ed i numeri 5, e 25 che sono divisori esatti di 25 non lo sono di 6. Risulta quindi dal §. 16 che, quando i termini di una frazione sono due numeri primi fra loro, la frazione non può ridursi ad espressione più semplice, per cui si chiama *irriducibile*. Tale è appunto la frazione $\frac{6}{25}$.

Se alla frazione $\frac{a}{n}$ si unisce un intero qualunque a , si avrà $a + \frac{a}{n}$, ovvero riducendo tutto a frazione, $\frac{a5 \times a + 6}{a5} = \frac{a6}{a5}$. Or questa nuova frazione è irriducibile al pari di $\frac{6}{a5}$ da cui deriva. In fatti per potersi la frazione $\frac{a6}{a5}$ ridurre ad espressione più semplice, bisognerebbe che il numeratore 56 fosse divisibile esattamente per 25, o per qualche divisore esatto di 25. Ma il numero 56 si compone di due parti cioè, di 25×2 , e di 6, e la prima parte 25×2 contenendo il numero 25 come fattore, è divisibile esattamente per 25, non meno che per qualunque divisore esatto di 25: affinchè dunque tutto il numero 56 potesse dividersi esattamente per un divisore di 25, dovrebbe anche la seconda parte 6 esser divisibile esattamente per lo stesso numero; e ciò non potendo accadere perchè i numeri 6 e 25 sono primi fra loro, il numero 56 non potrà neanche dividersi esattamente per alcun divisore di 25, e la frazione $\frac{a6}{a5}$ sarà irriducibile. Dunque in generale se ad una frazione irriducibile si aggiunga un numero intero, ne risulterà una nuova frazione pure irriducibile.

§. 19.

Trovare tutti i divisori di un numero dato.

Ad oggetto di facilitare sempre più la riduzione delle frazioni a' loro minimi termini, esporremo il metodo che deve tenersi per trovare tutti i divisori di un numero qualunque, anche perchè potrà riuscire utile in molte altre circostanze di calcolo.

Sia proposto il numero 360; si comincerà a dividerlo successivamente pei numeri primi 2, 3, 5, 7, 11 ec., ripetendo la divisione per lo stesso numero, sempre che sarà possibile, nel modo seguente

360 diviso per 2 dà 180
 180 per 2 .. 90
 90 per 2 .. 45
 45 per 3 .. 15
 15 per 3 .. 5
 5 per 5 .. 1

I numeri 2, 2, 2, 3, 3, 5 si chiamano i *divisori semplici* di 360, e sono i suoi fattori elementari, perchè moltiplicati fra loro lo riproducono; siccome può verificarsi con sostituire al dividendo di ciascuna delle successive divisioni il prodotto del corrispondente divisore pel quoziente. Si avrà,

$$360 = 2 \cdot 180 = 2 \cdot 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45 \\
= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Si disporranno poi i dividendi e i divisori semplici come nel seguente quadro

Dividendi.	Divisori semplici.	Divisori semplici e composti.
360	1	1
180	2	2
90	2	4
45	3	8
15	3	3, 6, 12, 24
5	5	9, 18, 36, 72
1		5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Il numero 360 risultando dalla moltiplicazione di tutti i divisori semplici fra loro, avrà per fattori anche i prodotti che si possono fare co' divisori medesimi in tutti i modi. Per esempio, poichè $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, sarà pure $360 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, e $360 = 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 5$ etc., dalle quali uguaglianze apparisce che i numeri 4, e 12 nascenti dal prodotto di due o più divisori semplici, sono anche divisori esatti di 360. Laonde per trovare tutti i divisori di 360 con un procedimento metodico, si comincerà dal ripetere nella 3.^a colonna il divisore 1, e si moltiplicherà il seguente divisore 2 della 2.^a colonna per questo primo divisore della terza, nella quale si noterà il prodotto 2. Allo stesso modo il terzo divisore semplice 2 si moltiplicherà per i divisori 1, 2 scritti nella 3.^a colonna, e nel registrare in essa i nuovi prodotti, si ometterà il divisore 2 già notato. E così procedendo, il quarto divisore 2 della seconda colonna si moltiplicherà per tutti i divisori 1, 2, 4 della terza colonna; il quinto divisore 3 della 2.^a colonna si moltiplicherà per tutti i divisori già notati nella terza, ed ogni nuovo divisore semplice della seconda colonna si moltiplicherà per tutti i divisori semplici e composti già scritti nella terza, tralasciando sempre di scrivere i prodotti che sarebbero ripetuti. In tal modo si verranno a formare in quest'ultima colonna tutti i divisori semplici e composti di 360.

Si comprenderà in fine facilmente che il numero 360 può formarsi in molte diverse maniere per mezzo de' suoi divisori composti; per esempio può ottenersi moltiplicando fra loro i numeri 3, 6, 20, oppure gli altri 4, 9, 10; etc.: ma in una sola maniera può comporsi per mezzo de' suoi divisori semplici cioè, $360 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$; perocchè questi numeri essendo primi, non possono nascere dal prodotto di altri più piccoli e quindi sono invariabili nella formazione del numero 360. Accadrebbe lo stesso per qualunque altro numero che si volesse rappresentare per mezzo de' suoi divisori semplici, i quali non potranno mai variare.

§. 20.

Ridurre una frazione a minimi termini per mezzo del massimo comune divisore.

Il metodo indicato nel §. 16 per ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, o come suol dirsi, ai suoi *minimi termini*, è spesso il più facile a praticarsi; ma riesce lungo ed incerto allorchè i termini della frazione sono numeri molto grandi, o hanno per divisore comune qualche numero, primo di due o più cifre, che è difficile di rinvenire. Allora si adopera a preferenza il metodo del *massimo comune divisore*.

Si è già veduto che quanto maggiore è il numero per cui si dividono i termini di una frazione, tanto più semplice è l'espressione alla quale essa si riduce. Per conseguenza se di tutti i divisori comuni al numeratore e al denominatore della frazione si cerchi il più grande, e si dividano i due termini per questo numero, la frazione sarà ridotta alla sua più semplice espressione.

Per trovare quel comune divisore maggiore di tutti gli altri, ovvero il *massimo comune divisore* fra il numeratore ed il denominatore di una frazione, si farà uso della regola seguente.

Si divida il maggiore de' due termini della frazione pel minore, indi quest'ultimo pel resto della divisione; poi il divisore della seconda divisione pel resto della medesima, e così andando avanti. Si giungerà finalmente ad una divisione senza resto; il divisore di quest'ultima divisione esatta sarà il massimo comune divisore fra i due termini della frazione. Debba per esempio ridursi a minimi termini la frazione $\frac{728}{325}$. Si cercherà primieramente il massimo comune divisore fra i due numeri 728, e 325; l'operazione si registrerà come segue,

Dividendi e divisori	728	2	4	6	quozienti
		325	78	13	
	650	312	78		
	78	13	00		

Il massimo comune divisore sarà 13, e dividendo i termini 728, e 325 per questo numero, si otterrà la frazione $\frac{56}{25}$ che è la più semplice espressione della frazione proposta.

Si può dare una dimostrazione rigorosa, ed abbastanza semplice di questa regola.

Ragionando sull'esempio proposto, devo dimostrarsi, 1.^o che il divisore 13 dell'ultima divisione senza resto divide esattamente tanto il numeratore che il denominatore della frazione $\frac{728}{325}$, 2.^o che il 13 non solo è divisore esatto de' numeri 728 e 325, ma è il loro *massimo comune divisore*, che si cercava.

1.^o Poichè in una divisione il dividendo si riproduce moltiplicando il quoziente pel divisore, ed aggiungendo il resto al prodotto ottenuto, le tre divisioni di cui si compone l'operazione precedente somministreranno le seguenti uguaglianze;

$$\begin{aligned} 728 &= 2 \times 325 + 78. \dots (1) \\ 325 &= 4 \times 78 + 13. \dots (2) \\ 78 &= 6 \times 13. \dots (3) \end{aligned}$$

Il numero 78 essendo divisibile esattamente per 13, come apparisce dall'uguaglianza (3), anche il prodotto 4×78 sarà divisibile per 13; ma l'uguaglianza (2) dimostra che il numero 325 è composto di due parti, 4×78 , e 13, ambedue divisibili esattamente per 13, dunque quest'ultimo numero è pure divisore esatto di tutto il 325. Allo stesso modo, se 325 è divisibile esattamente per 13, lo sarà ancora il prodotto 2×325 , e siccome per l'uguaglianza (1) il numero 728 è composto di due parti 2×325 , e 78, ambedue divisibili per 13, tutto il 728 potrà dividersi esattamente per 13. Questo numero sarà dunque un divisore esatto de' due termini della frazione proposta.

2.^o Per provare che sia il *massimo*, si supponga per un momento che i due numeri proposti 728 e 325 abbiano un divisore comune maggiore di 13, per esempio 15. Essendo 15 divisore esatto di 728, deve esserlo ancora dell'espressione equivalente $2 \times 325 + 78$; ma il prodotto 2×325 è anche divisibile per 15, perchè si è supposto quest'ultimo numero divisore esatto di 325, dunque, affinchè la somma $2 \times 325 + 78$ sia divisibile per 15, anche la parte aggiunta 78 deve potersi dividere esattamente

te per 15. Passando all'egualianza (2), se 325 è divisibile per 15, lo sarà pure l'espressione equivalente $4 \times 78 + 13$, e poichè in essa il prodotto 4×78 è divisibile per 15, al pari del suo fattore 78, anche la parte aggiunta 13 dovrà esser divisibile per 15; il che è impossibile, perchè un numero maggiore non può esser divisore esatto di un numero minore. Questa assurdità alla quale siamo giunti supponendo che i numeri proposti 728 e 325 potessero avere un divisore comune maggiore di 13, dimostra che la supposizione non era esatta, e quindi il massimo comune divisore de' due numeri proposti è effettivamente 13.

§. 21.

Delle frazioni continue.

Quando le frazioni irriducibili hanno una forma molto complicata, è difficile farsi un'idea del loro valore, ossia della parte dell'unità che rappresentano. Perciò occorre talvolta cercare delle frazioni che sotto forma più semplice poco differiscano nella loro quantità da una frazione proposta. Il metodo che si usa a tal oggetto è il seguente.

Sia data la frazione $\frac{25}{56}$, e si dividano i suoi termini pel numeratore 25, ciò che non altera il suo valore; si avrà, $\frac{25}{56} = \frac{1}{2 + \frac{6}{25}}$; si dividano di nuovo per 6 i termini della frazione $\frac{6}{25}$, ed essa diverrà $\frac{1}{4 + \frac{1}{6}}$ la quale espressione posta in luogo di $\frac{6}{25}$ nell'altra poc'anzi ottenuta

$$\frac{1}{2 + \frac{6}{25}}, \text{ darà,}$$

$$\frac{25}{56} = \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}}}.$$

Questa nuova forma data alla frazione $\frac{25}{56}$ dicesi *frazione continua*. Ed in generale, s'intende per *frazione continua* una frazione che ha per numeratore l'unità, e per denominatore un numero intero più una frazione, la quale ha essa pure per numeratore l'unità e per denominatore un intero più una frazione; e così di seguito.

Trascurando la parte aggiunta al primo denominatore 2 della frazione continua equivalente a $\frac{25}{56}$, si avrà la frazione $\frac{1}{2}$, che è l'espressione più semplice, ma nello stesso tempo meno approssimata che possa sostituirsi alla frazione proposta; trascurando soltanto la frazione $\frac{1}{6}$ aggiunta al secondo denominatore 4 si otterrà, $\frac{1}{2 + \frac{1}{4}}$, ovvero $\frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$, frazione

meno semplice ma di valore più approssimato a $\frac{25}{56}$; e finalmente ritenendo tutta l'espressione, si risalirà alla stessa frazione proposta, per mezzo di operazioni contrario a quelle eseguite per ottenere la frazione continua; cioè sarà,

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{25}{6}}} = \frac{1}{2 + \frac{6}{25}} = \frac{1}{\frac{56}{25}} = \frac{25}{56}$$

Per valutare l'errore che si commette nell' adottare le frazioni $\frac{1}{2}$, o $\frac{4}{9}$ in vece della proposta, si rifletterà prima di tutto che la frazione $\frac{1}{2}$ deve esser maggiore di $\frac{3}{5}$, perchè il denominatore 2 è minore di quello della frazione continua, essendosi trascurata la parte aggiunta $\frac{1}{4+\frac{3}{5}}$; ed al contrario la frazione $\frac{4}{9}$ è minore di $\frac{3}{5}$, perchè la frazione $\frac{1}{4}$ è più grande di $\frac{1}{4+\frac{3}{5}}$ che ha un maggiore denominatore, e quindi la somma $2+\frac{1}{4}$ è maggiore di $2+\frac{1}{4+\frac{3}{5}}$, e la frazione $\frac{1}{2+\frac{1}{4}}$, ossia $\frac{4}{9}$, è minore della intera frazione continua $\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{3}{5}}}$, che ha un denominatore

più piccolo. Inoltre, la frazione $\frac{1}{2}$ equivalendo a $\frac{3}{6}$, differisce dalla proposta per $\frac{3}{6}$, e le frazioni $\frac{4}{9}$ e $\frac{3}{5}$ differiscono fra loro di $\frac{1}{45}$ soltanto, poichè riducendole allo stesso denominatore divengono, $\frac{8}{9}$ e $\frac{6}{5}$.

Sia per secondo esempio da ridursi in frazione continua la frazione ordinaria $\frac{314159}{300000}$. Dividendone il numeratore ed il denominatore per 100000 si avrà $\frac{3+\frac{1}{14159}}{3+\frac{1}{100000}}$; dividendo di nuovo per 14159 i termini della frazione aggiunta si otterrà, $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{155}}}$, e così andando avanti, nel

modo usato di sopra. Ma per seguire una via più breve in questa operazione, riflettiamo che essa si riduce all'altra che ha per oggetto di trovare il massimo comune divisore fra i termini della frazione proposta, poichè i denominatori della frazione continua altro non sono che i quozienti delle divisioni successive che si effettuano a tal uopo. Premettiamo dunque l'operazione del massimo comune divisore, come qui appresso,

	3	7	15	125	174
314159	100000	14159	887	854	33
300000	99113	887	854	66	29
14159	887	5289	33	194	4
		4435		165	1
		854		29	

e la frazione continua che ne deriva sarà,

$$\frac{314159}{300000} = \frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{125 + \frac{1}{174 + \frac{1}{33 + \frac{1}{29 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}}}}}}}$$

Dalla medesima, ponendo successivamente a calcolo sempre un denominatore di più, si ricaveranno le frazioni ordinarie che seguono, le quali sono più semplici della proposta, ma ad essa gradatamente si approssimano tanto per valore che per forma;

$$\frac{7}{8}, \frac{7}{22}, \frac{106}{212}, \frac{113}{255}, \frac{2031}{6202}, \frac{3048}{9563}, \frac{6429}{19149}, \frac{100000}{314159}.$$

Con un esame non dissimile da quello istituito nell'esempio precedente si dimostrerà che queste frazioni sono alternativamente maggiori e minori della frazione proposta; così $\frac{7}{8}$ è maggiore, $\frac{7}{22}$ è minore, $\frac{106}{212}$ è maggiore, $\frac{113}{255}$ è minore etc. Esse esprimono tutte il rapporto del diametro alla circonferenza, che si considera in *Geometria*; ma le due $\frac{7}{8}$, e $\frac{106}{212}$ sono conoscitissime, una per la sua antichità, o l'altra per la sua approssimazione e simmetria. Il rapporto $\frac{7}{22}$ fu trovato la prima volta da *Archimede* celebre geometra di Siracusa, e questa frazione ridotta allo stesso denominatore con la proposta, risulta minore della medesima di $\frac{687}{691498}$, che può valutarsi presso a poco eguale ad $\frac{7}{1782}$, dividendone i termini per 887; approssimazione soddisfacente per un rapporto così semplice. Il rapporto $\frac{113}{255}$ fu dato da *Mezio*, ed ha due grandi vantaggi, il primo di ritenersi facilmente a memoria perchè si compone de' tre numeri dispari più semplici scritti per ordine di grandezza, e ripetuti ciascuno due volte cioè, 113 : 255; il secondo di non differire dalla frazione proposta che per una quantità assolutamente trascurabile, poichè riducendo le due frazioni $\frac{113}{255}$, e $\frac{100000}{314159}$ allo stesso denominatore si osserva che la prima è minore della seconda di $\frac{33}{11478643}$, ossia di $\frac{1}{347909}$ circa.

§. 22.

Dell'addizione e della sottrazione delle frazioni.

Quando due o più frazioni hanno lo stesso denominatore, è chiaro che le parti di cui sono composte appartengono alla stessa divisione dell'unità, e sono perciò eguali. Così le frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{2}$, sono amendue l'unione di più quinti, ossia l'unione di parti della stessa divisione dell'unità, onde ognuna delle parti di cui è composta la prima frazione è eguale ad ognuna delle parti di cui è composta la seconda. Dopo questa osservazione l'addizione e la sottrazione delle frazioni che hanno lo stesso denominatore non presenta alcuna difficoltà, giacchè potrà prendersi la somma o la differenza de' loro numeratori, appunto come si sommano o si sottraggono i numeri composti di unità intere; ma affinchè il risultamento di questa operazione esprima la vera grandezza delle unità poste a calcolo, si scriverà sotto alla somma o alla differenza ottenuta, il denominatore comune alle due frazioni. Per esempio, come due *ducats* e tre *ducats* formano l'unione o la somma di cinque *ducats*, così pure due *settimi* e tre *settimi* formano la somma di cinque *settimi*. Similmente la somma delle due frazioni $\frac{2}{12}$ e $\frac{3}{12}$ sarà $\frac{5}{12}$, e la loro differenza sarà $\frac{1}{12}$.

Qui cade a proposito un'avvertenza che abbiamo tralasciata parlando dell'addizione e della sottrazione de' numeri interi per non accrescere la difficoltà de' principii. Le unità che si considerano nell'Aritmetica non sono tutte della stessa grandezza o della stessa specie. Così 15 ducati e 25 grana sono numeri *omogenei*, o della stessa specie perchè tutti e due esprimono moneta, ma sono composti di unità di diversa grandezza; giacchè ogni ducato equivale a 100 grana. Inoltre, 15 ducati e 25 fucili sono numeri *eterogenei*, o di specie diversa, perchè il primo esprime una somma di denaro, e il secondo una collezione di armi da fuoco. Ora, è evidente che l'addizione e la sottrazione non possono eseguirsi se i numeri che si considerano sono collezioni di unità di diversa grandezza o di diversa specie; con la differenza però, che quelle due operazioni sono assolutamente impossibili trattandosi di numeri eterogenei, poichè, per esempio, il ducato non ha alcuna relazione col fucile, e non si potrà mai formare un sol numero dall'unione di un numero di ducati e di un numero di fucili; ed al contrario le operazioni medesime possono spesso effettuarsi, mediante particolari avvertenze, quando i numeri sono omogenei sebbene composti di unità di diversa grandezza, come si vedrà parlando de' numeri complessi.

Spesso dall'addizione di due o più frazioni risulta una frazione spuria, la quale può ridursi ad un intero più una frazione vera eseguendo la divisione del numeratore pel denominatore (§. 13). Questa operazione si chiama, *estrarre gl' interi da una frazione*.

§. 23.

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

L'addizione o la sottrazione non possono eseguirsi sulle frazioni che hanno diverso denominatore: perocchè i loro numeratori sono composti di unità di diversa grandezza, nè possono con la somma o la sottrazione ridursi ad un sol numero; nello stesso modo che se dovessero sommarsi 3 ducati con 6 grana, la somma non potrebbe esser rappresentata dal numero 9, ma s'indicherebbe soltanto dicendo, *tre ducati, e sei grana*. In tal caso le frazioni prima di sommarsi si riducono allo stesso denominatore.

Due o più frazioni si riducono allo stesso denominatore moltiplicando i termini di ciascuna pel prodotto de' denominatori delle altre. Così per ridurre le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ allo stesso denominatore, si moltiplicano i termini della prima per 12, prodotto de' denominatori 3, e 4 delle altre due; i termini della seconda per 8, prodotto de' denominatori 2, e 4; ed i termini della terza per 6, prodotto de' denominatori 2, e 3. Con questa operazione le frazioni avranno per denominatore comune il prodotto de' tre denominatori 2, 3, 4, nè cambieranno di valore,

perchè i termini di ognuna sono moltiplicati per uno stesso numero. Le frazioni ridotte saranno, $\frac{2}{24}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{4}{24}$.

Quando i denominatori delle frazioni da ridursi non sono numeri primi fra loro, può trovarsi per le medesime un denominatore comune più piccolo del prodotto di tutti i denominatori, il quale suole essere per lo più un numero molto grande. Siano da ridursi allo stesso denominatore le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{8}$. Riflettiamo che in generale può prendersi qualsivoglia numero per denominatore comune di queste frazioni, purchè sia divisibile esattamente per ciascuno de' loro denominatori. In fatti una frazione qualunque, per esempio $\frac{2}{3}$, può subito cambiarsi in un'altra che abbia per denominatore un numero divisibile esattamente pel suo denominatore 3, come 72; e ciò con moltiplicare i termini della frazione $\frac{2}{3}$ pel quoziente 24 della divisione di 72 per 3. Il denominatore della nuova frazione dovrà essere necessariamente 72, e la frazione trasformata sarà $\frac{16}{72}$. Le quattro frazioni proposte potrebbero quindi avere per denominatore comune il numero 72, il quale è divisibile esattamente per ciascuno de' loro denominatori 3, 4, 6, ed 8; ed il numero 48 godendo della medesima proprietà, potrebbe anche prendersi per comune denominatore delle frazioni medesime.

Ma per trovare un numero il quale sia il più piccolo denominatore comune che possa darsi alle frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{8}$, moltiplichiamo il maggiore de' quattro denominatori, 8, per numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ec. successivamente, ed avremo 8, 16, 24, 32 ec. Fra questi numeri, che sono tutti quelli che possono dividersi esattamente per 8 e diconsi i *multipli* di 8, si troverà sicuramente il denominatore cercato, dovendo il medesimo, per ciò che si è detto, essere divisibile per 8. Per conoscerlo, basta ricordarsi che esso deve potersi dividere esattamente anche per ciascuno degli altri tre denominatori 3, 4, 6, e deve essere inoltre il più piccolo possibile. Il numero 24 adempie a queste due condizioni, giacchè nessun multiplo di 8 più piccolo di 24 può dividersi esattamente per 3, per 4, e per 6; dunque 24 è il comune denominatore cercato. Si divida 24 per ciascuno dei quattro denominatori 3, 4, 6, 8, e si otterranno i quozienti 8, 6, 4, 3. Moltiplicando rispettivamente per questi numeri i termini delle frazioni proposte $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{8}$, si avranno le altre $\frac{16}{24}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{15}{24}$, ridotte allo stesso denominatore.

Si potrebbe anche ottenere il minimo comune denominatore ossia il *minimo comune dividendo* di tutti i denominatori delle frazioni proposte, decomponendo ciascuno di questi denominatori ne' suoi fattori semplici, o elementari (§. 9), e formando il prodotto di tutti i fattori diversi, con l'avvertenza che, quando un fattore è ripetuto in uno o più denominatori, dovrà prendersi tante volte, quante è scritto nel denominatore in cui è maggiormente ripetuto. Così nell'esempio precedente, i quattro denominatori essendo 3, 2. 2, 2. 3, 2. 2. 2, il minimo comune denominatore risulterà dal prodotto de' fattori semplici $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

§. 24.

Il prodotto che si ottiene dalle moltiplicazioni successive di più numeri fra loro non cambia di valore, qualunque sia l'ordine col quale si eseguono le moltiplicazioni.

Nel ridurre più frazioni al medesimo denominatore abbiamo veduto che il prodotto di tutti i denominatori riusciva sempre lo stesso, quantunque s'incominciassero le moltiplicazioni ora da un denominatore ed ora da un altro. Non deve credersi che ciò sia avvenuto soltanto ne' casi particolari ivi considerati, poichè in generale il prodotto che si ottiene moltiplicando successivamente più numeri fra loro rimane lo stesso, comunque si cambi l'ordine de' fattori.

Per dimostrarlo consideriamo tre numeri 4, 5, e 6, e proponiamoci di provare che il prodotto de' numeri 4, e 5 moltiplicato per 6, che indicheremo così, $(4 \cdot 5) \cdot 6$, è lo stesso del prodotto de' numeri 5, e 6 moltiplicato per 4, ovvero $(5 \cdot 6) \cdot 4$. Si è già veduto che $4 \cdot 5$ è lo stesso di $5 \cdot 4$ (§. 8), e perciò in vece di $(4 \cdot 5) \cdot 6$ potremo scrivere $(5 \cdot 4) \cdot 6$. Ora, il prodotto di 5 per 4 non è altra cosa che il 5 ripetuto *quattro* volte, ed il prodotto di 5 per 6 equivale al 5 ripetuto *sei* volte. Disponiamo dunque il prodotto $5 \cdot 4$, composto di *quattro* 5, in una linea orizzontale, e scriviamo cinque linee simili al di sotto. Avremo così composto un quadro del quale ogni linea orizzontale

$$\begin{array}{cccc} 5, & 5, & 5, & 5 \\ 5, & 5, & 5, & 5 \\ 5, & 5, & 5, & 5 \\ 5, & 5, & 5, & 5 \\ 5, & 5, & 5, & 5 \\ 5, & 5, & 5, & 5 \end{array}$$

corrisponde al prodotto $5 \cdot 4$, ed ogni colonna verticale al prodotto $5 \cdot 6$, e siccome il quadro stesso può considerarsi composto di sei linee orizzontali, o pure di quattro colonne verticali, così *sei* volte il prodotto $5 \cdot 4$ sarà la stessa cosa di *quattro* volte il prodotto $5 \cdot 6$ ovvero

$$(5 \cdot 4) \cdot 6 = (5 \cdot 6) \cdot 4$$

come ci eravamo proposti di dimostrare.

Con un simile ragionamento proveremo che,

$$(5 \cdot 4) \cdot 6 = (4 \cdot 6) \cdot 5.$$

Da ciascuna delle due eguaglianze precedenti se ne possono dedurre altre due cambiando l'ordine de' fattori ne' prodotti $5 \cdot 4$, $5 \cdot 6$, e $4 \cdot 6$, come è permesso (§. 8), e si avrà

$$\begin{array}{l} (5 \cdot 4) \cdot 6 = (5 \cdot 6) \cdot 4; \quad (4 \cdot 5) \cdot 6 = (5 \cdot 6) \cdot 4; \quad (5 \cdot 4) \cdot 6 = (6 \cdot 5) \cdot 4 \\ (5 \cdot 4) \cdot 6 = (4 \cdot 6) \cdot 5; \quad (4 \cdot 5) \cdot 6 = (4 \cdot 6) \cdot 5; \quad (5 \cdot 4) \cdot 6 = (6 \cdot 4) \cdot 5 \end{array}$$

le quali potranno abbreviarsi come segue,

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 6 \cdot 5 = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 5 \cdot 6 \cdot 4 = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

In quest'ultima espressione osservandosi tutti i possibili cambiamenti nel luogo de' fattori componenti il prodotto de' tre numeri 4, 5, e 6, se ne

desume che il prodotto stesso rimane inalterato qualunque sia l'ordine col quale si eseguono le moltiplicazioni.

Consideriamo inoltre il prodotto di quattro numeri 4, 5, 6, e 7 e proponiamoci di dimostrare che

$$(4 \cdot 5) \cdot 6 \cdot 7 = (6 \cdot 7) \cdot 4 \cdot 5.$$

Da ciò che precede abbiamo che

$$(4 \cdot 5) \cdot 6 = 4 \cdot 6 \cdot 5 = 24 \cdot 5, \text{ e quindi}$$

$$(4 \cdot 5) \cdot 6 \cdot 7 = 24 \cdot 5 \cdot 7. \text{ Similmente}$$

$$(6 \cdot 7) \cdot 4 = 4 \cdot 6 \cdot 7 = 24 \cdot 7, \text{ e per conseguenza,}$$

$(6 \cdot 7) \cdot 4 \cdot 5 = 24 \cdot 7 \cdot 5$. E potendo cambiarsi comunque l'ordine de' tre fattori 24, 5, e 7, ne segue ancora che

$$24 \cdot 5 \cdot 7 = 24 \cdot 7 \cdot 5, \text{ ovvero}$$

$$(4 \cdot 5) \cdot 6 \cdot 7 = (6 \cdot 7) \cdot 4 \cdot 5.$$

Con un simile discorso si dimostrerebbe la verità della proposizione enunciata, anche quando il prodotto fosse composto di un numero qualunque di fattori.

§. 25.

Dell'addizione, e della sottrazione degl'interi accompagnati da frazioni.

Quando deve eseguirsi l'addizione d'interi e frazioni, con interi e frazioni, si comincia ad operare sulle frazioni. Debba per esempio sommarsi $13\frac{3}{5}$ con $4\frac{2}{7}$: si cominciano a ridurre le due frazioni allo stesso denominatore, per poterle sommare, ed esse divengono $\frac{14}{35}$ e $\frac{10}{35}$; indi la loro somma $\frac{24}{35}$, che è una frazione spuria, si riduce ad un intero più una frazione vera (§. 22) e l'intero ottenuto, si unisce alla somma degl'interi. La somma totale sarà $18\frac{4}{35}$.

La sottrazione si esegue pure prima sulle frazioni, e poi su gli interi, il che non presenta alcuna difficoltà. Avviene però spesso che la frazione da sottrarsi è maggiore di quella da cui deve togliersi. Per esempio debba togliersi $4\frac{2}{7}$ da $13\frac{3}{5}$; dopo ridotte le frazioni allo stesso denominatore, dalla frazione $\frac{14}{35}$ dovrebbe sottrarsi la frazione $\frac{10}{35}$; ma ciò non potendo effettuarsi, si aggiungerà alla frazione $\frac{14}{35}$ un'unità improntata dall'intero 13. Questa unità equivale a $\frac{35}{35}$ (§. 13.), ed in conseguenza $13\frac{14}{35}$ è lo stesso di $12\frac{49}{35}$, da cui tolto $4\frac{10}{35}$, si avrà per residuo $8\frac{39}{35}$. Seguono alcuni esempi.

Addizione.	Addizione.	Sottrazione.
$\begin{array}{r} 54\frac{3}{5} \\ 105\frac{1}{5} \\ 19\frac{3}{5} \\ \hline 251\frac{7}{5} \end{array}$	$\begin{array}{r} 208\frac{1}{2} \\ 28\frac{4}{8} \\ \hline 236\frac{5}{8} \end{array}$	$\begin{array}{r} 520 \\ 13 \\ \hline 519\frac{13}{16} \end{array}$
$\begin{array}{r} 30 \\ 15 \\ 18 \\ \hline 53\frac{30}{1} \\ 23\frac{1}{1} \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ 6 \\ 3 \\ \hline 17 \end{array}$	

§. 26.

La tavola del §. 14 serve per moltiplicare e per dividere una frazione qualunque per un numero intero.

Dovendo moltiplicare una frazione per un numero intero, la tavola del §. 14 ci presenta evidentemente due maniere di farlo cioè, moltiplicando il numeratore della frazione per l'intero, oppure dividendo il denominatore pel medesimo. La prima operazione può sempre eseguirsi, ma non così la seconda, poichè il denominatore potrebbe non essere esattamente divisibile pel numero dato. Sia per esempio da moltiplicarsi $\frac{2}{4}$ per 2; il prodotto sarà $\frac{4}{4}$, oppure $\frac{2}{2}$, secondochè si moltiplicherà il numeratore, o si dividerà il denominatore della frazione per 2. Ma se dovesse moltiplicarsi $\frac{2}{6}$ per 2, il prodotto non potrebbe avere che la sola forma $\frac{4}{6}$, giacchè la divisione del denominatore 6 per 2 è inesatta, e darebbe l'espressione $\frac{2}{4+\frac{2}{3}}$, equivalente bensì alla

frazione $\frac{4}{6}$, ma di aspetto diverso da quello delle frazioni ordinarie.

La divisione di una frazione per un numero intero si esegue pure con la tavola del §. 14, moltiplicando il denominatore, o dividendo il numeratore della frazione pel numero dato. Così $\frac{4}{6}$ diviso per 2, dà per quoziente $\frac{4}{12}$, oppure $\frac{2}{3}$; ma non potrebbe eseguirsi la divisione di $\frac{4}{6}$ per 3 dividendo il numeratore, onde in tal caso il quoziente può avere soltanto la forma $\frac{4}{18}$, che si ottiene moltiplicando il denominatore della frazione per 3.

§. 27.

Della moltiplicazione di un intero per una frazione, o di due frazioni tra loro.

Parlando della moltiplicazione de' numeri interi abbiamo osservato che, il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando nello stesso modo che il moltiplicatore si forma per mezzo dell'unità. Così se il moltiplicatore si forma con la riunione di tre unità, il prodotto si forma similmente con la riunione di tre numeri eguali al moltiplicando; e se il moltiplicatore non è che la semplice unità intera, il prodotto ancora non è che il semplice moltiplicando. Estendendo questo principio al caso in cui il moltiplicatore sia una frazione, è evidente che, siccome il moltiplicatore si forma prendendo una parte dell'unità, il prodotto si dovrà formare prendendo una parte simile del moltiplicando. Per esempio il moltiplicatore $\frac{2}{4}$ di una moltiplicazione si forma per mezzo dell'unità, dividendola in quattro parti eguali, e prendendo tre di quelle parti, ossia prendendo la quarta parte dell'unità e ripetendola tre volte, ed allo stesso modo il prodotto

di un numero qualunque per $\frac{1}{2}$ dovrà formarsi prendendo la *quarta parte* di quel numero e ripetendola *tre* volte, cioè *per formare il prodotto si dovrà prendere una parte del moltiplicando simile alla parte dell'unità indicata dalla frazione moltiplicatore*. Dopo di ciò sarà facile eseguire la moltiplicazione di un numero qualunque per una frazione, ed anche di una frazione per un'altra frazione.

1.° Sia da moltiplicarsi 12 per $\frac{3}{4}$; la frazione moltiplicatore esprimendo le *due terze parti* dell'unità, per formare il prodotto bisognerà prendere le *due terze parti* del moltiplicando 12, cioè prendere la *terza parte* di 12 e ripeterla *due* volte. La terza parte di 12 è 4, e quindi il prodotto sarà 8. In questo esempio il prodotto è risultato un numero intero perchè il moltiplicando 12 era divisibile esattamente per 3.

2.° Debba moltiplicarsi 5 per $\frac{3}{4}$; il prodotto dovrà essere *tre quarti* del moltiplicando 5, come il moltiplicatore è *tre quarti* dell'unità. Si cercherà dunque la quarta parte di 5, che è $\frac{5}{4}$, e prendendola tre volte nel modo indicato dal §. precedente, si avrà per prodotto, $\frac{5 \times 3}{4}$ ovvero $\frac{15}{4}$. Quindi *per moltiplicare un*

intero per una frazione, deve moltiplicarsi l'intero pel numeratore, e scrivere il denominatore sotto al prodotto ottenuto. Questa regola si confonde con quella data nel §. 26 per moltiplicare una frazione per un intero; per cui si può conchiudere che il prodotto di un intero per una frazione è lo stesso di quello della frazione per l'intero, malgrado che il significato di queste due operazioni sia in apparenza diverso. Moltiplicare $\frac{3}{4}$ per 5 significa ripetere cinque volte la frazione $\frac{3}{4}$, e moltiplicare 5 per $\frac{3}{4}$ significa prendere i tre quarti di 5.

3.° Siano finalmente da moltiplicarsi tra loro le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Prendiamo la seconda per moltiplicatore, e siccome questa vale *due terzi* dell'unità, così il prodotto cercato dovrà valere *due terzi* del moltiplicando $\frac{4}{3}$. Per formare un tal prodotto si dovrà dunque prendere la terza parte della frazione $\frac{4}{3}$ e raddoppiarla. La terza parte di $\frac{4}{3}$ si ottiene dividendo questa frazione per 3, e pel §. 26 il quoziente risulterà $\frac{4}{9 \times 3}$, ovvero $\frac{4}{27}$; multipli-

cando quest'ultima per 2, si avrà per lo stesso §., $\frac{4 \times 2}{9 \times 3}$, ossia $\frac{8}{27}$ che sarà il prodotto delle due frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Si potrebbe giungere in un altro modo allo stesso risultamento. Si moltiplichino i termini della frazione moltiplicando per 3, si avrà la frazione equivalente $\frac{4 \times 3}{3 \times 3}$. Di questa dovranno prendersi le due terze parti, e siccome il numeratore 12 è divisibile per 3, potranno eseguirsi sul medesimo tanto la divisione per 3 che la moltiplicazione per 2, e si otterrà pure la frazione $\frac{8}{27}$ per prodotto delle due frazioni proposte.

Consideriamo inoltre $\frac{4}{5}$ come moltiplicatore; il prodotto delle frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ dovrà essere *quattro quinti* del moltiplicando $\frac{2}{3}$, perchè il moltiplicatore rappresenta *quattro quinti* dell'unità. Perciò si dovrà prendere la quinta parte di $\frac{2}{3}$ e moltiplicarla per 4, cioè si dividerà la frazione $\frac{2}{3}$ per 5, ed il quoziente ottenuto si moltiplicherà per 4. Ambedue queste operazioni si eseguono con le regole del §. 26, e la prima darà $\frac{2}{3 \times 5}$, la seconda $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ ovvero $\frac{8}{15}$, che sarà il prodotto richiesto.

Dunque tanto la moltiplicazione di $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ quanto quella di $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ ha dato per prodotto una frazione, della quale il numeratore è il prodotto de' numeratori delle frazioni da moltiplicarsi, ed il denominatore è il prodotto de' denominatori; onde potrà stabilirsi la regola generale che, *per moltiplicare fra loro due frazioni si deve moltiplicare il numeratore pel numeratore ed il denominatore pel denominatore.*

§. 28.

Delle frazioni di frazioni, e del modo di ridurle a frazioni semplici.

Nel §. precedente si è fatta dipendere la moltiplicazione delle frazioni dal principio enunciato nel §. 8 trattandosi della moltiplicazione de' numeri interi, che il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando nello stesso modo che il moltiplicatore si forma per mezzo dell'unità. Sotto questo aspetto non vi è alcuna differenza tra la moltiplicazione delle frazioni e quella dei numeri interi, onde la definizione generale della moltiplicazione è la seguente: *moltiplicare due dati numeri fra loro vuol dire formare un terzo numero per mezzo del primo nello stesso modo che il secondo si forma per mezzo dell'unità.* Ma paragonando il prodotto col moltiplicando si vede che, se il moltiplicatore è un numero intero, il prodotto è sempre maggiore del moltiplicando, e non gli è eguale se non quando il moltiplicatore pareggia l'unità; ed al contrario, se il moltiplicatore è una frazione vera, il prodotto non è che una parte del moltiplicando. Dunque la parola *moltiplicare* che, quando si opera su i numeri interi, vale *ripetere un numero tante volte quante unità si contengono in un altro numero dato*, deve intendersi diversamente quando si opera sulle frazioni, e significa, *prendere di un numero dato la parte che viene indicata da una data frazione.*

Il prodotto di due frazioni essendo una parte della frazione moltiplicando, può dirsi una *frazione* di quella *frazione*. Così il prodotto $\frac{8}{15}$ delle due frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$ è *due terzi di quattro quinti*, o *quattro quinti di due terzi*, secondochè si prende per moltiplicando $\frac{4}{5}$, o $\frac{2}{3}$. In conseguenza, se è data una frazione,

e se ne vuol prendere una frazione, o parte conosciuta, basterà all'uopo effettuare la moltiplicazione delle due frazioni fra loro. Per esempio, sia data la frazione $\frac{2}{3}$, e se ne voglia prendere la terza parte; si moltiplicherà $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{3}$, e si avrà $\frac{2}{9}$, e volendo le due terze parti della stessa frazione, si moltiplicherà $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{3}$, e si avrà $\frac{4}{9}$.

Il prodotto di tre frazioni è una *frazione di frazione di frazione*, poichè la moltiplicazione di tre frazioni, come, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, si esegue prendendo i quattro quinti di due terzi, ed indi i cinque settimi della frazione di frazione ottenuta, ossia prendendo i cinque settimi de' quattro quinti di due terzi. Quindi per prendere una frazione di frazione di una data frazione, non si farà che moltiplicare fra loro le tre frazioni enunciate. Così domandandosi i tre quarti de' quattro quinti di due terzi, sarà soddisfatto al quesito eseguendo la moltiplicazione delle frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$; il prodotto, o la frazione di frazione di frazione desiderata sarà $\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7}$, ovvero $\frac{8}{105}$. Non è difficile estendere questo discorso ad un numero maggiore di frazioni, ed in tal modo una qualunque frazione di frazioni si ridurrà per mezzo della moltiplicazione ad una frazione semplice.

È da osservarsi che, *cambiando comunque l'ordine de' fattori nell'eseguire la moltiplicazione di due o più frazioni, il prodotto risulta lo stesso*, perchè esso è sempre una frazione che ha per numeratore il prodotto di tutti i numeratori, e per denominatore il prodotto di tutti i denominatori, e questi due prodotti, per ciò che altrove si è dimostrato (§. 24) non variano al variar di luogo de' fattori che li compongono.

Finalmente il prodotto di più frazioni si ottiene spesso con somma facilità adoperando alcune abbreviazioni dipendenti dalla citata proprietà del §. 24. Per esempio il prodotto delle frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, non eseguendo ma indicando soltanto le moltiplicazioni, è $\frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4}$, in cui potremo sostituire ai numeri 2, e 6 i prodotti equivalenti 1.2, e 3.2, e cambiare l'ordine dei fattori nel denominatore, ed otterremo, $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3}$. Or que-

sta espressione è pure il prodotto delle altre frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, ciascuna delle quali, eccettuata la prima, è eguale all'unità (§. 13), e quindi il prodotto medesimo si cambierà in, $\frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$, ovvero $\frac{1}{3}$. Un analogo procedimento potendo adoperarsi in tutti i casi simili, siamo autorizzati a stabilire in generale che, *in una frazione, quando il numeratore non meno che il denominatore trovasi espresso da un prodotto indicato e non eseguito di più numeri fra loro, possono senza inconvenientemente sopprimerli tutti i fattori comuni ad ambedue i termini, qualunque sia il luogo che occupano; e se, sciogliendo i rimanenti fattori dissimili in altri fattori più semplici, ne*

torgeranno di nuovo alcuni comuni al numeratore ed al denominatore della frazione, anche questi si sopprimeranno. Così l'espressione $\frac{3 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 2}$ si riduce subito a $\frac{12 \cdot 11}{5 \cdot 15 \cdot 2}$, ed indi sciogliendo i numeri 12, e 15 in fattori più semplici si ottiene $\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11}{5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2}$, in cui se si sopprimeranno di nuovo i fattori comuni 2, e 3 si avrà finalmente, $\frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 5}$, ovvero $\frac{22}{25}$.

Le regole esposte di sopra per la moltiplicazione delle frazioni si applicano senza alcuna modificazione alle frazioni spurie; e vuolsi avvertire soltanto che mentre il prodotto di due frazioni vere è sempre minore di ciascuno de' fattori, il prodotto di una frazione vera per una frazione spuria è sempre maggiore della frazione vera, e l'eguaglia nel solo caso in cui la frazione spuria pareggia l'unità.

§. 29.

Ridurre un intero ad una frazione spuria di dato denominatore, e quindi un intero ed una frazione ad una sola frazione.

Per la moltiplicazione, e per la divisione degl'interi uniti a frazioni occorre spesso di ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione. A tal oggetto dovrà prima ridursi un intero a frazione spuria di denominatore dato. Debba ridursi l'intero 4 ad una frazione che abbia per denominatore 3; riflettendo che ogni unità contenuta nel 4 può mettersi sotto la forma di $\frac{2}{2}$ (§. 13), si vede che il 4 equivale alla frazione $\frac{2}{3}$ ripetuta quattro volte, ossia alla frazione $\frac{8}{3}$; dunque il numeratore della cercata frazione spuria è il prodotto dell'intero pel denominatore dato. Vogliasi inoltre ridurre ad una sola frazione l'intero 4 unito alla frazione $\frac{2}{3}$; si cambierà il 4 in $\frac{12}{3}$, e questa frazione sommata con $\frac{2}{3}$, darà la frazione unica $\frac{14}{3}$ equivalente a $4\frac{2}{3}$. Dunque per ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione, si moltiplica l'intero pel denominatore della frazione, al prodotto si aggiunge il numeratore, e si scrive il denominatore sotto alla somma ottenuta.

Questa operazione è evidentemente l'inversa di quella di estrarre gl'interi da una frazione, accennata nel §. 22.

§. 30.

Della moltiplicazione delle frazioni unite agl' interi.

Le frazioni unite agl' interi si moltiplicano con le stesse regole precedenti, avvertendo di ridurre prima ad una sola frazione qualunque fattore composto d' un intero e di una frazione (§. 29). Per esempio debba moltiplicarsi $14\frac{3}{5}$ per $4\frac{1}{4}$: si ridurrà $14\frac{3}{5}$ ad una sola frazione, e si avrà $\frac{71}{5}$; si ridurrà similmente $4\frac{1}{4}$ ad una frazione e si avrà $\frac{17}{4}$, e si moltiplicheranno indi fra loro le due frazioni $\frac{71}{5}$ e $\frac{17}{4}$ che daranno per prodotto $\frac{1207}{20}$ ovvero $60\frac{7}{20}$, da cui estratti gl' interi si avrà $60\frac{7}{20}$. Questa operazione può anche eseguirsi moltiplicando ciascuna parte del moltiplicatore per ciascuna parte del moltiplicando, e sommando i vari prodotti ottenuti, analogamente a ciò che si è detto pe' numeri interi nel §. 17; eccone alcuni esempi.

$$\begin{array}{r} 14\frac{3}{5} \\ 4\frac{1}{4} \\ \hline 56 \\ 2\frac{3}{5} \\ 3\frac{3}{5} \\ \hline 18\frac{6}{5} \\ 62\frac{4}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18\frac{2}{3} \\ 20 \\ \hline 360 \\ 5\frac{2}{3} \\ \hline 365\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 3\frac{1}{4} \\ \hline 363 \\ 30\frac{1}{4} \\ \hline 393\frac{1}{4} \end{array}$$

Nel primo esempio il prodotto totale $62\frac{4}{5}$, ovvero $62\frac{1}{2}$ è composto di quattro prodotti parziali cioè, dell' intero del moltiplicatore per l' intero del moltiplicando, dell' intero del moltiplicatore per la frazione del moltiplicando, della frazione del moltiplicatore per l' intero del moltiplicando, ed in fine delle due frazioni fra loro. E deve pure osservarsi che per sommare le tre frazioni $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, basta ridurre le prime due allo stesso denominatore senza incaricarsi della terza, poichè il denominatore comune al quale si perviene, essendo il prodotto de' due denominatori 3 e 4, deve risultare lo stesso del denominatore della terza frazione. Negli altri esempi si hanno due soli prodotti parziali.

§. 31.

Dividere un' intero per una frazione ed una frazione per un' altra frazione.

Sia da dividersi l' intero 5 per la frazione $\frac{1}{2}$. Per la natura della divisione il numero 5 è un prodotto di cui un fattore è $\frac{1}{2}$, e si cerca l' altro fattore (§. 9). Se consideriamo il fattore dato $\frac{1}{2}$ come moltiplicatore, il prodotto 5 rappresenterà la *terza parte* del moltiplicando incognito (§. 27), e perciò triplicando il 5

si otterrà l'intero moltiplicando, ossia il fattore o quoziente cercato, che sarà 15. Dunque *dividere* 5 per $\frac{1}{3}$ significa lo stesso che *moltiplicarlo* per 3; mentre al contrario *moltiplicare* 5 per $\frac{1}{3}$ vale lo stesso che *dividerlo* per 3 (§. 28).

Debba inoltre dividersi l'intero 5 per $\frac{2}{3}$. Per ciò che si è detto, rappresentando $\frac{2}{3}$ il moltiplicatore, e 5 il prodotto, questo numero dovrà essere i due terzi del moltiplicando incognito. Quindi la metà di 5, ossia $\frac{5}{2}$, equivarrà ad un solo terzo del moltiplicando medesimo, e questo terzo ripetuto tre volte dovrà dare l'intero moltiplicando, che sarà perciò, $\frac{5}{2} \times 3 = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$.

Dunque il quoziente della divisione di 5 per $\frac{2}{3}$ si ottiene moltiplicando l'intero 5 per la frazione $\frac{3}{2}$, che corrisponde alla frazione proposta *capovolta* o *rovesciata*. Per cui potrà dirsi in generale che, *per dividere un intero per una frazione si moltiplica l'intero per la frazione rovesciata*.

Le medesime considerazioni si applicano alla divisione di una frazione per un'altra. Voglia dividersi $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{7}$; rappresenterà $\frac{2}{7}$ il moltiplicatore, e $\frac{3}{7}$ il prodotto, il quale dovrà perciò valere due terzi del moltiplicando incognito. Quindi prendendo la metà di $\frac{2}{7}$, si otterrà un solo terzo del moltiplicando cercato cioè, $\frac{1}{7}$, e triplicando questa frazione si avrà l'intero moltiplicando, ossia $\frac{1}{7} \times 3 = \frac{3}{7}$.

Dunque il quoziente della divisione di $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{7}$ si ottiene moltiplicando fra loro le due frazioni $\frac{2}{7}$, e $\frac{7}{3}$, cioè in generale, *per dividere una frazione per un'altra, si capovolge la frazione divisore, e si moltiplica per la frazione dividendo*.

Questa regola potrebbe anche dimostrarsi diversamente. Si riducano le frazioni $\frac{2}{7}$, e $\frac{3}{7}$ allo stesso denominatore e si avranno le frazioni equivalenti $\frac{2 \times 4}{7 \times 4}$ e $\frac{3 \times 4}{7 \times 4}$, le quali sono composte di parti appartenenti alla medesima divisione dell'unità, e quindi della stessa grandezza. In conseguenza per dividere $\frac{2 \times 4}{7 \times 4}$ per $\frac{3 \times 4}{7 \times 4}$, o ciò che vale lo stesso, per conoscere quante volte la frazione divisore è contenuta nella frazione dividendo, basta conoscere quante volte il numero delle parti che compongono la frazione divisore è contenuto nel numero delle parti simili che compongono la frazione dividendo, cioè basta dividere il numeratore 15 pel numeratore 14. Il quoziente di questa divisione non dipende dalla grandezza delle parti che compongono il dividendo ed il divisore, e rimarrebbe lo stesso se si cambiasse a piacere il denominatore comune alle due frazioni. Ciò si rende anche più chiaro con un esempio; 5 ducati sono contenuti in 20 ducati quattro volte, al pari di 5 carlini in 20 carlini, e di 5 grana in 20 grana, malgrado che le unità componenti i numeri 20, e 5 sian di diversa grandezza in ciascuna delle tre divisioni. Dunque il quoziente

della divisione di $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{3}$ è $\frac{15}{14}$, ovvero $\frac{5}{7} \times \frac{3}{2}$, come si è trovato di sopra.

È facile dimostrare con lo stesso metodo la regola della divisione di un intero per una frazione. Essendo dati 5 e $\frac{2}{3}$, si ridurrà l'intero 5 ad una frazione che abbia per denominatore 3, e si otterranno così le due frazioni $\frac{5}{3}$ e $\frac{2}{3}$, e dividendo la prima per la seconda col ragionamento usato poc'anzi, si avrà per quoziente $\frac{5}{2}$, ovvero $5 \times \frac{3}{2}$, come sopra.

Risulta da ciò che, *quando le frazioni da dividersi una per l'altra hanno lo stesso denominatore, il quoziente si ottiene con la divisione del numeratore della frazione dividendo pel numeratore della frazione divisore.*

Sarà anche utile avvertire che, *se le due frazioni hanno lo stesso numeratore il quoziente si ottiene con la divisione del denominatore della frazione divisore pel denominatore della frazione dividendo.* In fatti se le frazioni fossero $\frac{4}{5}$ e $\frac{4}{7}$, applicando la regola generale si avrà, $\frac{4}{5} : \frac{4}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{7}{5}$ (§. 28), cioè il quoziente si ottiene dividendo 7 per 5.

§. 32.

Della divisione delle frazioni unite agl' interi.

Quando il dividendo, o il divisore, oppure ambedue sono composti di un intero e di una frazione, prima di eseguire la divisione si riduce l'intero e la frazione ad una sola frazione (§. 29). Per esempio dovendo dividersi $4\frac{3}{4}$ per $2\frac{1}{2}$, si riduce $4\frac{3}{4}$ ad una sola frazione, e si ha $\frac{19}{4}$; si riduce del pari $2\frac{1}{2}$ ad una sola frazione, e si ha $\frac{5}{2}$; dopo di ciò si dividono le due frazioni $\frac{19}{4}$ ed $\frac{5}{2}$ una per l'altra, come insegna la regola del §. precedente. Se il quoziente risulta una frazione spuria, si riduce ad un intero più una frazione vera per mezzo della divisione (§. 22).

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

§. 33.

Origine delle frazioni decimali.

Il sistema decimale di numerazione (§. 2) dà origine ad una specie di frazioni, il calcolo delle quali, sebbene dipenda dalle regole esposte di sopra per le frazioni in generale, offre però alcune agevolazioni importanti che derivano dal modo particolare in cui si suppone divisa l'unità.

Come ne' numeri interi, progredendo dalla sinistra verso la destra, ogni unità contiene dieci volte la sua vicina, per esempio un migliajo contiene dieci centinaia, un centinajo contiene dieci

decine ed una decina contiene dieci unità semplici, così continuando la progressione delle unità sempre dieci volte più piccole una dell'altra, si è considerata l'unità semplice composta di dieci parti eguali, ognuna delle quali è un *decimo* della unità medesima; si è considerato indi il decimo composto di dieci parti eguali, ognuna delle quali è per conseguenza la decima parte di un decimo ossia un *centesimo* dell'unità; il centesimo composto di dieci parti eguali, ognuna delle quali è la decima parte di un centesimo, ovvero un *millesimo* dell'unità, e così di seguito. Queste frazioni si chiamano *decimali* perchè hanno origine dalla divisione successiva dell'unità, e delle sue parti sempre in dieci altre parti più piccole.

§. 34.

Maniera di scrivere le frazioni decimali, e loro relazione con le frazioni ordinarie.

Le frazioni, un *decimo*, un *centesimo*, un *millesimo*, un *diecimillesimo* etc. costituiscono, come abbiamo veduto, una progressione di unità delle quali ciascuna ha un valore sempre dieci volte minore della precedente, e perciò possono scriversi una alla destra dell'altra, come si fa de' numeri interi, per le diverse classi di unità andando dalla sinistra verso la destra. Si situeranno dunque i decimi alla destra degl'interi, i centesimi alla destra de' decimi, i millesimi alla destra de' centesimi ec., separando con una virgola gl'interi dalle frazioni decimali. La progressione generale delle unità intere e frazionarie conterrà perciò due progressioni che cominciano dall'unità semplice, e si estendono indefinitamente, una verso la sinistra, e l'altra verso la destra, come qui sotto,

etc.	I	I	I	I	I	,	I	I	I	I	etc.
	<i>decina di migliaia</i>	<i>migliaia</i>	<i>centinaia</i>	<i>decina</i>	<i>unità</i>		<i>decimo</i>	<i>centesimo</i>	<i>millesimo</i>	<i>diecimillesimo</i>	

Da questa serie apparisce chiaramente che le frazioni decimali si compongono le une per mezzo delle altre appunto come i numeri interi. Così un decimo contiene 10 centesimi, ovvero 100 millesimi, ovvero 1000 diecimillesimi ec.; un centesimo contiene 10 millesimi, ovvero 100 diecimillesimi, ovvero 1000 centomillesimi ec.; un millesimo contiene 10 diecimillesimi, ovvero 100 centomillesimi ec.

Dopo di ciò sarà facile scrivere qualunque *decimale*, intendendo con questa parola una *frazione decimale*, oppure un *intero* unito ad una *frazione decimale*. Per esempio 54 interi e 25 centesimi si scriveranno così, 54,25; dove si è situata la cifra 2 nel luogo de' decimi, perchè 20 centesimi sono la stessa cosa di due decimi. Similmente 325 diecimillesimi si scrivono così, 0,0325; dove mancando gl'interi e i decimi, si è supplito il luogo de' primi con uno zero, per poter situare la virgola che separa gl'interi da' decimali, ed il luogo de' secondi con un altro zero, per conservare ai diecimillesimi il quarto luogo dopo la virgola; e si sono anche poste le cifre 3, e 2 nel secondo e nel terzo luogo, perchè 300 diecimillesimi sono lo stesso di 3 centesimi, e 20 diecimillesimi sono lo stesso di 2 millesimi. Dunque *volendo scrivere qualunque decimale, dovrà separarsi la parte intera dalla frazionaria con la virgola, e scrivere poi la frazione decimale come se fosse un intero, avendo l'avvertenza di situare l'ultima cifra a destra nel luogo che le compete secondo la sua denominazione, e di riempire con zeri i luoghi vuoti dopo la virgola, se ve ne sono. Mancando gl'interi si scriverà uno zero avanti la virgola.*

La pratica di scrivere i decimali guida anche alla lettura dei medesimi. Così 59,0063 si legge, *cinquantanove, e sessantatré diecimillesimi*; e 0,000063 si pronunzia *sessantatré milionesimi*.

Paragonando i decimali

1. ^o	54,25
2. ^o	0,0325
3. ^o	59,0063
4. ^o	0,000063

scritti sotto forma d'interi, con le espressioni equivalenti,

1. ^a	$54 \frac{25}{100}$, ovvero $\frac{5425}{100}$,
2. ^a	$\frac{325}{10000}$,
3. ^a	$59 \frac{63}{10000}$, ovvero $\frac{590063}{10000}$,
4. ^a	$\frac{63}{1000000}$

scritte sotto forma di frazioni ordinarie, si vede subito che il numeratore di ognuna delle frazioni ordinarie non è altro che il decimale corrispondente in cui si è soppressa la virgola, ed il denominatore è formato dall'unità seguita da tanti zeri quante cifre contiene il decimale corrispondente dopo la virgola. Onde potranno stabilirsi le seguenti regole generali; *per rappresentare un decimale sotto la forma di frazione ordinaria, bisogna dare per denominatore alle cifre che esso contiene l'unità seguita da tanti zeri quante cifre decimali si contano dopo la virgola, la quale si sopprime, e viceversa per ridurre sotto forma intera una frazione ordinaria che ha per denominatore l'unità seguita da uno o più zeri, si sopprime questo denominatore, e nel numeratore si situa la virgola in modo che rimangano separate tante cifre decimali, quanti zeri si contavano nel denominatore della frazione ordinaria.*

§. 35.

Una frazione decimale non si altera se alla sua destra si aggiungono o si sopprimono uno o più zeri.

Per ciò che si è detto nel §. precedente, aggiungendo o sopprimendo uno o più zeri a destra di un decimale qualunque si vengono ad aggiungere o a sopprimere altrettanti zeri nel denominatore corrispondente, il che non altera il valore del decimale. Sia data, in fatti, la frazione decimale 0,310. La frazione ordinaria corrispondente sarà $\frac{310}{1000}$. Ora, si sa che una frazione non cambia di valore, se i suoi termini si moltiplicano o si dividono per lo stesso numero. Perciò dividendo i termini della frazione $\frac{310}{1000}$ per 10, o moltiplicandoli per 10, 100 etc., si avranno le frazioni ordinarie, $\frac{310}{1000}$, $\frac{31}{100}$, $\frac{3100}{10000}$, $\frac{31000}{100000}$, tutte uguali fra loro; ed eguali fra loro saranno pure tutte le frazioni decimali corrispondenti 0,310; 0,31; 0,3100; 0,31000.

§. 36.

Dell' addizione de' decimali.

L'addizione de' decimali si esegue perfettamente come quella de' numeri interi, poichè le parti decimali si compongono le une per mezzo delle altre nello stesso modo delle unità intere (§. 33). Deve solo aversi l'avvertenza di situare i numeri in modo che corrispondano i decimi sotto ai decimi, i centesimi sotto ai centesimi, e così di seguito. Per esempio,

$$\begin{array}{r} 4, 0301 \\ 13, 03 \\ 24, \\ 3, 00002 \\ \hline 44, 06012 \end{array}$$

§. 37.

Della sottrazione de' decimali.

La sottrazione de' decimali si esegue come quella de' numeri interi, avvertendo soltanto di eguagliare per mezzo di zeri il numero delle cifre decimali del sottrattore e del sottraendo, quando occorre. Per esempio dovendo sottrarsi 24,0031 da 35,03 si aggiungeranno due zeri a quest'ultimo numero, e l'operazione si eseguirà come qui appresso;

$$\begin{array}{r} 35, 0300 \\ 24, 0031 \\ \hline 11, 0269 \end{array}$$

Così pure quando uno de' numeri non contiene decimali. Per esempio debba sottrarsi 0, 3429 da 35; si farà,

$$\begin{array}{r} 35, 0000 \\ 0, 3429 \\ \hline 34, 6571 \end{array}$$

§. 38.

Del complemento aritmetico.

Accade spesso che uno o più numeri debbano togliersi dalla somma di altri numeri. Così l'espressione,

$34,531 + 2,37 - 10,35 - 4,8$,
indica che devono sommarsi i due numeri 34,531 e 2,37, che dalla somma ottenuta deve togliersi 10,35, e da ciò che rimane deve pure sottrarsi 4,8; dimodochè l'operazione proposta si compone di tre operazioni cioè, di una somma e di due sottrazioni, come segue,

$$\begin{array}{r} 34,531 \\ 2,37 \\ \hline 36,901 \\ 10,35 \\ \hline 26,551 \\ 4,8 \\ \hline 21,751 \end{array}$$

Ma in questi casi si può giungere più brevemente al risultamento finale facendo uso del *complemento aritmetico*.

Il resto della sottrazione di un numero qualunque dall'unità seguita da uno o più zeri dicesi *complemento aritmetico* di quel numero. Per esempio il complemento di 10,35 è 89,65, che si ottiene sottraendo 10,35 da 100; il complemento di 4,8 è 5,2, resto della sottrazione di 4,8 dal 10, e può essere ancora 95,2 resto della sottrazione di 4,8 da 100, con la differenza che il numero 5,2 si chiama *complemento al 10*, e l'altro 95,2 dicesi *complemento al 100*. *Prendere il complemento* di un dato numero significa effettuare la sottrazione ora indicata, e questa operazione è così facile, che con un poco di pratica si esegue a mente, giacchè si riduce a sottrarre da 9 ciascuna cifra del numero proposto cominciando dalla sinistra, all'infuori dell'ultima significativa che si sottrae da 10. Così il complemento a 10000 del numero 5320 è 4680, e si ottiene togliendo successivamente da 9 le cifre 5 e 3, e da 10 l'ultima cifra significativa 2. È chiaro però che se dovesse prendersi il complemento di 5320 a 100000, esso sarebbe 94680, ed il complemento ad 1000000 sarebbe 994680; cioè in tali casi alla sinistra del complemento del numero proposto, preso a mente nel modo indicato, dovranno scriversi uno o più 9, sino a che il numero totale delle cifre del complemento medesimo pareggi il numero degli zeri da cui è seguita l'unità prescelta.

Ciò premesso, è facile persuadersi che ogni sottrazione si cangia in addizione mediante il complemento aritmetico. Per esempio volendo sottrarre 10,350 da 36,901, si aggiungerà a quest'ultimo numero il complemento di 10,350 a 100, cioè 89,650, e si otterrà la somma 126,551 la quale supera il vero risultamento di 100, ossia dell'unità sulla

*Sottrazione facendo uso
del complemento*

$$\begin{array}{r} 36,901 \\ 89,650 \\ \hline 126,551 \end{array}$$

Sottrazione ordinaria

$$\begin{array}{r} 36,901 \\ 10,350 \\ \hline 26,551 \end{array}$$

quale si è preso il complemento. Ed in fatti 89,650 non è che 100 diminuito di 10,350, e quindi aggiungere 89,650 a 36,901 vale lo stesso che aggiungervi 100 e toglierne 10,350, o inversamente, toglierne 10,350 ed aggiungervi 100; dunque il risultamento dell'addizione di 36,901 con 89,650, cancellandone l'unità sulla quale si è preso il complemento, equivale al resto della sottrazione proposta.

Similmente la sottrazione di 4,8 da 26,551 si eseguirà come qui appresso;

$$\begin{array}{r} 26,551 \\ 95,2 \\ \hline 121,751 \end{array}$$

Ma l'uso del complemento aritmetico risulta di poco o nessun vantaggio nelle operazioni isolate, e la sua maggiore utilità si manifesta in vece quando si cerca il risultamento di più addizioni e sottrazioni successive, potendo allora ridursi tutte quelle operazioni ad una sola addizione. Riprendiamo l'espressione,

$$34,331 + 2,37 - 10,35 - 4,8,$$

ed in vece di eseguire come sopra un'addizione e due sottrazioni, potremo secondo gli esposti principii effettuare soltanto l'addizione di quattro numeri cioè, di 34,331, di 2,37, del complemento di 10,35, e del complemento di 4,8 presi ambedue sopra 100; si avrà,

$$\begin{array}{r} 34,331 \\ 2,37 \\ .89,65 \\ .95,2 \\ \hline 221,751 \end{array}$$

e togliendo le due unità introdotte da' due complementi, ognuna delle quali si è notata con un puntino, il risultamento finale sarà, 21,751.

Per ultimo esempio debbano effettuarsi le operazioni indicate nell'espressione,

$$45430,13 + 103,53 - 999,15 - 54,007 - 2035,2.$$

le quali considerate nel loro insieme prendono il nome di *riduzione*. Usando il complemento aritmetico la *riduzione* proposta si cambierà nella seguente addizione,

$$\begin{array}{r} 45430,13 \\ 103,53 \\ .9000,85 \\ .9945,993 \\ .7964,8 \\ \hline 72445,303 \end{array}$$

Risultamento 42445,303

Deve avvertirsi che per evitar qualunque confusione, è necessario che in simili operazioni i complementi si prendano tutti sopra unità della stessa classe.

Alterazione che soffre un decimale variando di luogo la virgola.

Prendiamo per esempio il numero 34,27. Trasportando la virgola un luogo più a destra si ha 342,7; ed è chiaro che la cifra 2 che rappresentava decimi, rappresenta ora unità; la cifra 4 che rappresentava unità, rappresenta ora decine, e la cifra 3 che rappresentava decine rappresenta centinaia; o finalmente la cifra 7 a destra della virgola rappresentava centesimi, ed ora rappresenta decimi. Dunque ogni cifra del numero proposto è divenuta dieci volte maggiore, e perciò il numero stesso col cambiamento della virgola è divenuto dieci volte maggiore di quello che era prima. Trasportando la virgola due luoghi più a destra, si ha 3427. Questo numero è dieci volte maggiore di 342,7, e cento volte maggiore di 34,27. Dunque trasportando la virgola di un luogo verso la destra, il numero cresce dieci volte, trasportandola di due luoghi cresce cento volte etc.

Con un simile esame si vede subito che trasportando la virgola di un luogo a sinistra, trasportandola di due luoghi etc., il numero diminuisce dieci volte, cento volte etc. Così il numero 3,427 è dieci volte minore di 34,27; e l'altro 0,3427 è dieci volte minore di 3,427, e cento volte minore di 34,27.

Un decimale in cui si sopprime la virgola, si cambia in un numero intero, e rimane con quella operazione moltiplicato per l'unità seguita da tanti zeri quanto cifre si contavano a destra della virgola, perchè sopprimere la virgola in un decimale equivale a trasportarla a destra dopo tutte le cifre decimali, siccome si è praticato di sopra col decimale 34,27 quando si è mutato nel numero intero 3427. Potrebbe anche dirsi che sopprimendo la virgola in un decimale, si viene a sopprimere il denominatore nella frazione ordinaria che gli corrisponde, per cui quella frazione, la quale si cambia in un intero, rimane moltiplicata pel denominatore che prima aveva.

Viceversa se voglia dividersi un intero per l'unità seguita da uno o più zeri, basterà separare con una virgola tante cifre alla destra del numero quanti sono gli zeri. Così volendo dividere 347 per 1000, si scriverà 0,347 per quoziente; perocchè questa operazione si riduce a trasportare la virgola di tre luoghi verso la sinistra, e si è già valutato più sopra l'effetto di un tal movimento della virgola. Lo stesso numero diviso per 1000 darebbe 0,0347, e diviso per 10000 darebbe 0,00347. E potrebbe anche riconoscersi l'esattezza di queste operazioni riflettendo che i decimali 0,0347, e 0,00347 corrispondono alle frazioni ordinarie $\frac{347}{10000}$ e $\frac{347}{100000}$, che rappresentano appunto la *diecimillesima* e la *centomillesima* parte del numero 347.

§. 40.

Della moltiplicazione de' decimali.

Prima di parlare della moltiplicazione de' decimali sarà utile stabilire il seguente principio: *in qualsivoglia moltiplicazione se si moltiplica o si divide uno de' due fattori per un numero qualunque, il prodotto risulta moltiplicato o diviso per lo stesso numero; e se uno de' fattori si moltiplica e l'altro si divide per un medesimo numero, il prodotto rimane inalterato.* Così nella moltiplicazione $4 \times 5 = 20$, dividendo il fattore 4 per 2, si ottiene il nuovo prodotto $2 \times 5 = 10$ metà del precedente; e dividendo uno de' fattori per 2 e moltiplicando l'altro pel medesimo numero, la moltiplicazione si cambia in una di queste altre due, $8 \times \frac{5}{2}$, 2×10 che danno lo stesso prodotto primitivo, 20. Questa proprietà della moltiplicazione è una immediata conseguenza della natura di essa, e riuscirà evidente riflettendo un poco su quanto si è detto ne' §§. 8, 27, 28 intorno al significato ed all'ufficio de' tre numeri che si considerano in quella operazione, cioè *moltiplicando, moltiplicatore e prodotto.*

Ciò premesso, siano da moltiplicarsi fra loro i decimali 4,21 e 5,3; sopprimendo la virgola in entrambi, il primo rimarrà moltiplicato per 100 ed il secondo per 10 (§. 39), e per ciò che ora si è detto, il prodotto de' nuovi due fattori 421 e 53 risulterà eguale a quello de' decimali proposti moltiplicato prima per 100 e poi per 10, ossia moltiplicato per 1000. Eseguita la moltiplicazione de' numeri interi 421 e 53 si ottiene 22313, e questo numero dovendo essere 1000 volte maggiore del prodotto de' decimali 4,21 e 5,3, per ridurlo al giusto valore basterà dividerlo per 1000, con separare tre cifre decimali alla sua destra (§. 39); si otterrà così il prodotto esatto 22,313. Dunque in generale *per moltiplicare fra loro due decimali, si considera soppressa la virgola in ciascuno di essi, e si moltiplicano come se fossero numeri interi; indi nel prodotto ottenuto si separano tante cifre decimali quante ne contenevano insieme i due fattori.*

Questa regola potrebbe anche agevolmente dimostrarsi ponendo i decimali sotto forma di frazioni ordinarie. La moltiplicazione di 4,21 per 5,3 equivale a quella di $\frac{421}{100}$ per $\frac{53}{10}$ che si esegue (§. 27) moltiplicando fra loro i numeri interi 421, 53, e dividendo il prodotto ottenuto 22313 per 1000, con separare in esso tre cifre decimali, come già si è detto.

Per un altro esempio debba moltiplicarsi 0,0027 per 0,035; si farà come segue,

$$\begin{array}{r}
 0,0027 \\
 0,035 \\
 \hline
 135 \\
 81 \\
 \hline
 0,000945
 \end{array}$$

dove si vede che per dare al prodotto tante cifre decimali quante ne contenevano insieme i due fattori, si sono suppliti con zeri i luoghi mancanti di cifre significative.

§. 41.

Maniera di ridurre una frazione ordinaria qualunque in frazione decimale.

Per ridurre una frazione ordinaria qualunque in frazione decimale, bisogna ricordarsi che ogni frazione ordinaria rappresenta una divisione che non potendo eseguirsi, rimane soltanto indicata (§. 13). Così $\frac{3}{8}$ significa 3 diviso per 8, la quale divisione non potendo eseguirsi, rimane sotto la forma di $\frac{3}{8}$. Ma si può col soccorso delle frazioni decimali eseguire la divisione indicata di 3 per 8. Infatti si supponga il numeratore 3 ridotto in 30 decimi, ed allora la divisione potrà eseguirsi, e si avrà per quoziente 3 decimi con un resto di 6 decimi. Riduciamo questo resto in 60 centesimi, e continuando la divisione, avremo per quoziente 7 centesimi con un resto di 4 centesimi. Riduciamo questo resto in 40 millesimi, e continuando la divisione avremo per quoziente 5 millesimi senza resto. Dunque la divisione di 3 per 8 eseguita coll'ajuto delle frazioni decimali dà un quoziente composto di 3 decimi, 7 centesimi, e 5 millesimi, ossia dà per quoziente 0,375; e perciò la frazione $\frac{3}{8}$ eguaglia la frazione decimale 0,375, come può verificarsi riducendo a minimi termini la frazione $\frac{375}{1000}$. L'operazione descritta è la seguente.

$$\begin{array}{r} 3,0 \\ 8 \overline{) 60} \\ 40 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 0,375 \end{array}$$

Quindi, per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale basta dividere il numeratore pel denominatore, riducendo successivamente in decimi, centesimi, millesimi etc. le parti del numeratore medesimo, affin di poter eseguire la divisione.

Secondo questa regola, volendo valutare in decimali la frazione annessa al quoziente di una divisione qualunque, non deve farsi altro che continuare la divisione stessa, con aggiungere al resto uno zero, ed ottenendo un secondo resto aggiungervi un altro zero, e così di seguito, come può osservarsi nel seguente esempio.

$$\begin{array}{r} 91 \\ 11 \\ \text{Resto } 3,0 \\ 8 \overline{) 60} \\ 40 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 11,375 \end{array}$$

Volendo ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{3}{80}$, è da notare che il numeratore ridotto in decimi è ancora così piccolo da non potersi eseguire la divisione, per cui si deve ridurre in centesimi; perciò nel quoziente non vi sono decimi, e bisogna scrivere uno zero nel loro luogo, come nell'operazione qui appresso.

$$\begin{array}{r} 3,00 \\ 600 \\ 400 \\ 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80 \\ \hline 0,0375 \end{array}$$

Similmente la frazione $\frac{3}{800}$ ridotta in decimali darebbe 0,00375. Ma in queste due ultime riduzioni, dopo aver aggiunti al dividendo tanti zeri quanti sono necessari per determinare il luogo della prima cifra significativa del quoziente, la divisione potrà eseguirsi con maggior semplicità sopprimendo a destra del divisore e del dividendo un egual numero di zeri, come è permesso (§. 9 pag. 23), ed apparirà anche più chiaro dal §. seguente.

L'operazione di convertire una frazione ordinaria in frazione decimale riducesi a valutare la frazione proposta in decimi, o centesimi o millesimi etc., secondo l'approssimazione che si desidera. Ma potrebbe, più generalmente, domandarsi di *valutare una data frazione in parti dell'unità di determinata denominazione*. Per esempio sia da valutarsi la frazione $\frac{3}{4}$ in *sessantesimi*; in tal caso in vece di moltiplicare il numeratore per 10, per 100, o per 1000 etc., si moltiplicherà per 60 e si dividerà pel denominatore. Eseguita l'operazione si ottiene 45 per quoziente, d'onde si può conchiudere che $\frac{3}{4}$ equivalgono a $\frac{45}{60}$. Spesso la divisione non è esatta, e ciò avviene quando il denominatore della proposta frazione non è divisore esatto del numero pel quale si moltiplica il numeratore, cioè del nuovo denominatore imposto alla frazione. Così volendo ridurre $\frac{3}{4}$ in venticinquesimi, non può ottenersi una frazione perfettamente equivalente alla proposta, giacchè 75 non è divisibile esattamente per 4; la frazione *approssimata* che ne risulta è $\frac{18}{75}$, e si adotta per numeratore 19 e non 18, perchè il quoziente completo della divisione di 75 per 4 essendo $18 \frac{3}{4}$, si approssima più a 19 che a 18.

§. 42.

Della divisione de' decimali.

La divisione di un decimale per un numero intero può eseguirsi con le stesse avvertenze usate nel §. precedente per ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria annessa al quoziente di una divisione qualunque. In fatti se in vece di eseguire, come sopra, la divisione di 91 per 8, dovrà dividersi per questo medesimo numero il decimale 91,46, l'operazione procederà nel modo indicato,

se non che in luogo di aggiungere al resto 3 uno zero, gli si porrà a fianco la cifra 4 de' decimi contenuti nel dividendo, e si avranno così 34 decimi da dividersi per 8, la quale operazione effettuata, darà 4 decimi per quoziente e 2 decimi per resto. A lato di questa cifra si scriveranno i 6 centesimi del dividendo, ed eseguita la divisione de' 26 centesimi per 8 si otterranno 3 centesimi per quo-

$$\begin{array}{r}
 91,46 \\
 11 \\
 3,4 \\
 26 \\
 20 \\
 40
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 \\
 \hline
 11,4325
 \end{array}$$

ziente e 2 centesimi per resto. Esaurite così le cifre decimali del dividendo, se si vorrà una maggiore approssimazione, si aggiungerà all'ultimo resto uno zero e si continuerà la divisione come si è praticato per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale.

Può accadere che anche il divisore contenga cifre decimali, ma questo caso si cambierà subito nel precedente riducendo il divisore a numero intero. Imperciocchè il principio stabilito nel §. 4o relativamente alla moltiplicazione, applicato alla divisione in cui il dividendo è il prodotto del divisore pel quoziente, può enunciarsi così; *se in una divisione si moltiplica o si divide il dividendo per un numero qualunque, lasciando inalterato il divisore, il quoziente risulterà del pari moltiplicato o diviso per lo stesso numero; viceversa se si moltiplica o si divide il divisore per un certo numero, senza mutare il dividendo, il quoziente risulterà inversamente diviso o moltiplicato per quel numero; e finalmente se il dividendo e il divisore si moltiplicano o si dividono per un medesimo numero, il quoziente rimarrà inalterato.* Ora, dovendo dividere, a cagion d'esempio, il decimale 91,46 per l'altro 8,25, si ridurrà il divisore a numero intero trasportando la virgola due luoghi a destra, e si eseguirà pel dividendo lo stesso trasporto di virgola. Con questa operazione il dividendo ed il divisore risulteranno moltiplicati per 100 ambedue, (§. 39.) ed il quoziente rimarrà inalterato.

Sia inoltre da dividersi 3,253 per 21,37; sarà lo stesso che dividere 325,3 per 2137, ed il quoziente si otterrà con la regola data di sopra per la divisione di un decimale per un intero. Nel caso attuale però, il dividendo essendo minore del divisore, bisognerà servirsi della cifra 3 de' decimi per effettuare la divisione, per cui la prima cifra significativa del quoziente esprimerà decimi. Similmente, se dovesse dividersi 0,3253 per 21,37, l'operazione si ridurrebbe a dividere 32,53 per 2137; ma qui per eseguire la divisione bisognerà servirsi della cifra de' centesimi, per cui la prima cifra significativa del divisore esprimerà centesimi. Laonde la regola generale per la divisione dei decimali potrà essere la

seguinte. Per dividere un decimale per un altro, bisogna ridurre il divisore a numero intero, trasportando convenientemente la virgola anche nel dividendo, ed eseguire poi la divisione come si fa co' numeri interi, avvertendo di dare alla prima cifra significativa del quoziente il luogo, rispetto alla virgola, che occupa l'ultima cifra del primo dividendo parziale.

Per un altro esempio, debba dividersi 0,325 per 21,37: sarà lo stesso che dividere 32,5 per 2137, ma questa operazione non potrà eseguirsi senza aggiungere uno zero al dividendo nel luogo de' centesimi, per cui l'ultima cifra del primo dividendo parziale esprimendo centesimi, la prima cifra significativa del quoziente esprimerà pure centesimi.

Si potrebbe immediatamente cambiare la divisione di due decimali in quella di due numeri interi uguagliando con l'aggiunta di alcuni zeri il numero delle cifre decimali del dividendo e del divisore, e sopprimendo la virgola in entrambi, ed a ciò si riduce la regola precedente quando il divisore contiene più cifre decimali del dividendo; ma nella ipotesi contraria la divisione diventerebbe senza necessità più complicata, acquistando il divisore un maggior numero di cifre. Così se dovesse dividersi 34,256 per 7,3, uguagliando le cifre e sopprimendo la virgola i due numeri diverrebbero 34256 e 7300, ed ognun vede che questa divisione è più penosa dell'altra di 342,56 per 73.

§. 43.

Delle frazioni decimali periodiche.

Riducendo una frazione ordinaria in frazione decimale spesso si osserva che nel quoziente ritornano le stesse cifre. Per esempio $\frac{2}{3}$ sviluppata in frazione decimale dà, 0,324324324 etc. dove le cifre 324 son ripetute di seguito ed all'infinito, giacchè nella divisione di 12 per 37 dopo le prime tre cifre del quoziente, si ha un resto 12, o la divisione comincia da capo con lo stesso ordine sino ad aversi un secondo resto 12, e dopo tre altre cifre un terzo resto 12, e così all'infinito. Le frazioni decimali in cui le cifre sono ripetute a questo modo si chiamano *periodiche*, e le cifre che si ripetono, prendono il nome di *periodo*. Così 0,324324324 etc. è una frazione periodica, ed il periodo è 324. Riducendo in decimale la frazione $\frac{5}{11}$ si ha 0,45454545 etc. ed il periodo è 45, e così di altre.

Le frazioni decimali periodiche comunque si spezzino, non rappresentano mai con esattezza le frazioni ordinarie da cui derivano. In fatti prendiamo per esempio la frazione $\frac{2}{3}$ che sviluppata in frazione decimale dà 0,333333 etc. all'infinito; se si cercasse di sapere dopo qual numero di cifre questa frazione decimale eguaglia esattamente la frazione $\frac{2}{3}$, esaminata attentamente la cosa, si vedrebbe che non la eguaglia mai. Imperciocchè prendiamo una sola cifra,

ed avremo $0,3$ ovvero $\frac{3}{10}$, che potrà paragonarsi ad $\frac{1}{3}$ con ridurre le due frazioni allo stesso denominatore; le frazioni ridotte saranno $\frac{9}{30}$ e $\frac{10}{30}$, da cui apparisce che la frazione decimale $0,3$ è minore di $\frac{1}{3}$, e la differenza fra le due è $\frac{1}{30}$. Prendiamo due cifre; cioè $0,33$ che corrisponde a $\frac{33}{100}$; le frazioni $\frac{33}{100}$ ed $\frac{1}{3}$ ridotte allo stesso denominatore si cambiano in $\frac{99}{300}$ e $\frac{100}{300}$, ed il paragone di queste due ultime frazioni ci avverte che $0,33$ è minore di $\frac{1}{3}$, e la differenza è $\frac{1}{300}$. Prediamo tre cifre $0,333$ e troveremo questa frazione anche minore di $\frac{1}{3}$, ma la differenza sarà di $\frac{1}{3000}$ soltanto. Continuando a questo modo, troveremo sempre la frazione decimale più piccola della frazione ordinaria, ma la differenza andrà pure sempre diminuendo, sino a ridursi piccolissima e trascurabile. Laonde potremo conchiudere che, *ogni frazione decimale periodica, limitata ad un certo numero di cifre, non può mai rappresentare con esattezza la frazione ordinaria da cui deriva, ma si accosta ad essa sempre più sino a differirne per una quantità piccolissima e trascurabile, secondo che si prende un numero maggiore di cifre decimali*. La frazione ordinaria alla quale il valore della corrispondente frazione decimale si avvicina continuamente, senza mai poterla raggiungere, diccsi *limite* della frazione decimale; e qui deve notarsi che la parola *limite* è presa in un significato alquanto diverso da quello usato nel linguaggio ordinario, intendendosi comunemente per limite un ostacolo o un termine cui si può giungere, ma che non può oltrepassarsi.

Volendo di una frazione decimale, periodica o qualunque, prendere un determinato numero di cifre, nel rigettare le altre si deve avere l'avvertenza di aggiungere una unità all'ultima cifra che si ritiene, quante volte ciò che si trascura supera i $\frac{1}{2}$ di quella unità. Così per esempio se dovessero prendersi tre sole cifre della frazione $0,454545$, si adotterebbe $0,455$ per frazione *approssimata*, essendo il valore delle cifre trascurate maggiore di $\frac{1}{2}$ di millesimo: ma se volesse spezzarsi la frazione dopo quattro cifre, si dovrebbe adottare $0,4545$, per essere il valore delle rimanenti cifre $0,000045$ minore di mezzo diecimillesimo. È facile concepire la ragione di questa pratica: nell'esempio precedente la frazione abbreviata $0,455$ che si adotta, quantunque maggiore della proposta $0,454545$ si approssima ad essa più di $0,454$, perchè la differenza fra $0,455$ e $0,454545$ è $0,000455$, mentre la differenza fra $0,454545$ e $0,454$ è $0,000545$; al contrario adottando le quattro cifre $0,4545$ non deve aggiungersi l'unità ai diecimillesimi perchè con quell'aumento si commetterebbe un errore in più di $0,000055$, mentre ritenendo le cifre quali sono si commette un errore in meno di soli $0,000045$. La regola ora esposta è *fondamentale nelle approssimazioni aritmetiche*; essa riceve continue applicazioni nel calcolo numerico, anche trattandosi di frazioni ordinarie o di numeri interi. Così, volendo valutare in numeri interi l'espressione numerica $55\frac{1}{7}$, si adotterà il numero 56 , e

non il 55, perchè la frazione $\frac{4}{5}$ che si trascura è maggiore di $\frac{1}{5}$; parimente se per concepire con più facilità il valore della frazione molto complessa $\frac{2.2.2.3}{5.5.7}$ si dividessero i suoi termini per 118, si

otterrebbe l'espressione $\frac{3}{21 \frac{0.5}{1.18}}$, che si dovrebbe considerare

come $\frac{3}{21}$, per essere la frazione $\frac{0.5}{1.18}$ aggiunta al denominatore 21 maggiore di $\frac{1}{21}$; e da ultimo se volesse esprimersi in migliaia la forza di un esercito composto di 35654 uomini, non si direbbe già che l'esercito consta di 35 mila uomini, ma sibbene di 36 mila, perchè il valore delle cifre numeriche che occupano le tre classi da sopprimersi eccede il mezzo migliaio. Da questa regola, osservata generalmente, risulta che, *un decimale o un numero il quale, per semplicità di calcolo, rappresenta il compendio di una espressione numerica più complicata, non può contenere un errore più grande di mezza unità nell'ultima sua cifra a destra.*

Si potrebbe domandare d'onde avviene che alcune frazioni ordinarie si riducono in frazioni decimali di un limitato numero di cifre, e per altre la divisione ed il numero delle cifre decimali procede all'infinito. Per dar ragione di questa differenza prendiamo una frazione ordinaria ridotta alla sua più semplice espressione, per esempio $\frac{2.4}{1.7.5}$; e rappresentandone il numeratore ed il denominatore col prodotto de' loro divisori semplici (§. 19)

si avrà, $\frac{2.4}{1.7.5} = \frac{2.2.2.3}{5.5.7}$, dove si osserva che i fattori componenti

il denominatore sono tutti diversi da quelli del numeratore, per essere la frazione a' suoi minimi termini. Or l'operazione di ridurre la frazione ordinaria in decimale consiste nel moltiplicare il numeratore per 10, 100, 1000. ec. secondo che si desidera maggiore approssimazione, il che equivale ad introdurre nel numeratore i fattori 2, e 5 una o più volte; perchè moltiplicare un numero per 10 è lo stesso che moltiplicarlo per 2 e per 5, e moltiplicarlo per 100 vale moltiplicarlo per 10 due volte, ossia moltiplicarlo due volte per 2 ed altrettante per 5, e così di seguito. Dunque, se moltiplicheremo successivamente per 10 anche il denominatore della frazione $\frac{2.4}{1.7.5}$, per conservarne inalterato il valore, la medesima si cambierà in

$\frac{2.2.2.3 \times 2.5.2.5.2.5 \text{ etc.}}{5.5.7}$, ovvero cancellando i fattori 5,5

$\frac{5.5.7 \times 10.10.10 \text{ etc.}}$

comuni al numeratore ed al denominatore (§. 28) si avrà,

$\frac{2.2.2.3 \times 2.2.2.5 \text{ etc.}}$

$\frac{7 \times 1000 \text{ etc.}}$. Dalla quale espressione apparisce chiaramente

che la successiva moltiplicazione per 10, comunque protratta indefinitamente, non potendo mai introdurre nel numeratore fattori diversi da' numeri 2, e 5, non sarà valevole ad annullare nel denominatore il fattore 7; e quindi il quoziente della divisione prolungata, che vien rappresentato dalla

stessa frazione $\frac{2.2.2.3 \times 2.2.2.5 \text{ etc.}}$,

non potrà mai esser ridotto

ad una frazione avente per denominatore l'unità seguita da zeri, cioè ad un numero intero di millesimi o di decimillesimi, o di centomillesimi etc., e la divisione non terminerà mai.

Al contrario, quando il denominatore della proposta frazione ordinaria sarà

composto per mezzo de' fattori 2 e 5, in qualunque numero essi siano, e comunque ripetuti, la moltiplicazione successiva del numeratore per 10 giungerà sempre ad annullarli, e la divisione avrà un termine. Così la frazione $\frac{231}{250} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$ dovrà ridursi a frazione decimale di un limi-

tato numero di cifre, e propriamente a millesimi, perchè tre moltiplicazioni per 10 bastano ad eliminare i fattori 2, 5, 5, 5 dal denominatore. Dunque in generale, una frazione che ha il denominatore composto di fattori primi non contenuti nel numeratore e diversi da' numeri 2 e 5, non può ridursi a frazione decimale di un limitato numero di cifre. Di più, la frazione decimale risultante che procede all' infinito deve avere un periodo, siccome si è già avvertito; in fatti nell' eseguire la divisione, i resti delle divisioni parziali non possono esser sempre diversi, perchè ciascuno di essi dovendo esser minore del divisore, il numero de' resti diversi fra loro non può oltrepassare il numero delle unità contenute nel divisore stesso meno una, e quindi al più dopo un egual numero di operazioni rivenendo gli stessi resti e gli stessi dividendi parziali, ritorneranno nel quoziente le stesse cifre e ricomincerà il periodo. Per esempio, riducendo $\frac{1}{7}$ in frazione decimale si ottengono i resti 3, 2, 6, 4, 5, 1 tutti diversi fra loro, i quali in questo caso sono nel loro massimo numero nè potrebbero essere più di sei, altrimenti vi sarebbe un resto 7 eguale al divisore; donde dopo le prime sei operazioni ritornano gli stessi resti e gli stessi dividendi parziali, e ricomincia il periodo composto di sei cifre, cioè al massimo di tante cifre quante unità sono contenute nel divisore meno una. Ma il periodo può esser più breve; così riducendo la frazione $\frac{1}{14}$ in decimale, i resti 7, e 4 rivengono subito gli stessi, ed il periodo è di due cifre soltanto.

§. 44.

Data una frazione decimale qualunque, trovare la frazione ordinaria corrispondente.

Se la frazione decimale non è periodica, non vi bisogna alcun artificio per trovare la corrispondente frazione ordinaria, e basta eseguire ciò che prescrivasi nel §. 34. Per esempio la frazione decimale 0,125 corrisponde alla frazione ordinaria $\frac{125}{1000}$, la quale ridotta a minimi termini si cambia in $\frac{1}{8}$. Ma se la frazione decimale è periodica, si farà nel modo seguente.

Osserviamo primieramente che le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{9999}$, etc. ridotto in frazioni decimali con la divisione, danno i seguenti sviluppi;

$$\begin{array}{l} \frac{1}{9} \text{ corrisponde a } . 0,111111 \text{ ec.} \\ \frac{1}{99} \text{ } 0,010101 \text{ ec.} \\ \frac{1}{999} \text{ } 0,001001001 \text{ ec.} \\ \frac{1}{9999} \text{ } 0,00010001 \text{ ec.} \end{array}$$

In queste frazioni periodiche il numero delle cifre del periodo va sempre crescendo; nella prima il periodo è composto della sola cifra 1, nella seconda il periodo è 01, nella terza è 001 etc.

Ciò premesso, sia da ridursi in frazione ordinaria la frazione

decimale periodica $0,33333$ etc., di cui il periodo è di una sola cifra. Rilettiamo che la frazione periodica $0,11111$ etc. moltiplicata per 3 dà per prodotto $0,33333$ etc., e perciò la frazione decimale proposta è tripla della frazione $0,11111$ etc. Quindi le frazioni ordinarie corrispondenti, dovranno essere anche una tripla dell'altra, cioè la frazione corrispondente a $0,3333$ etc. dovrà esser tripla di $\frac{1}{3}$ che corrisponde a $0,11111$ etc. Se dunque moltiplicheremo per 3 la frazione $\frac{1}{3}$, avremo la frazione ordinaria $\frac{3}{3}$, ovvero 1 , che sarà la frazione ordinaria corrispondente a $0,3333$ etc. Per un altro esempio, debba trovarsi la frazione ordinaria equivalente a $0,454545$ etc. Prendiamo la frazione $0,010101$ etc. corrispondente ad $\frac{1}{99}$, e moltiplichiamola per 45, ossia pel periodo della frazione proposta; il prodotto sarà, $0,45454545$ etc., cioè la stessa frazione proposta. Questa frazione è dunque 45 volte maggiore dell'altra $0,010101$ etc., e la medesima relazione dovendo verificarsi tra le frazioni ordinarie corrispondenti, se moltiplicheremo la frazione $\frac{1}{99}$ per 45, il prodotto $\frac{45}{99}$, ovvero $\frac{5}{11}$, sarà la frazione ordinaria corrispondente alla frazione decimale periodica $0,454545$ etc.

Allo stesso modo si ridurrà in frazione ordinaria qualunque altra frazione decimale periodica, e solo dovrà avvertirsi di scegliere la frazione $0,001001001$ etc. se il periodo della frazione proposta è di tre cifre, l'altra $0,00010001$ etc. se il periodo è di quattro cifre etc.

Dunque per ridurre una frazione decimale periodica in frazione ordinaria, si prende il periodo per numeratore della frazione ordinaria, e se gli dà per denominatore un numero composto di tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Se la frazione decimale contenesse alcune cifre avanti di cominciare il periodo, si farebbe nel modo seguente. Per esempio debba ridursi in frazione ordinaria, $0,3345454545$ etc. Osserviamo che vi sono le due cifre 33 avanti al periodo, che è 45. *Trasportiamo la virgola immediatamente innanzi al periodo*, ed avremo $33,454545$ etc., e siccome $0,454545$ etc. è eguale a $\frac{5}{11}$, così il valore di $33,454545$ etc. sarà $33\frac{5}{11}$. Ma questo numero è cento volte maggiore della frazione proposta, perchè corrisponde al decimale $33,454545$ etc. che si è ottenuto da quella frazione trasportando in essa la virgola due luoghi a destra (§. 39); dovrà dunque dividersi $33\frac{5}{11}$ per 100, onde ottenere la frazione ordinaria corrispondente a $0,334545$ etc. Riduciamo $33\frac{5}{11}$ ad una sola frazione, ed avremo $\frac{3685}{11}$, la quale frazione si dividerà per 100 moltiplicandone il denominatore per questo numero. La frazione $\frac{3685}{1100}$ sarà in fine il vero valore della frazione decimale proposta $0,334545$ etc.

Abbreviazioni ne' calcoli.

I. L'uso delle frazioni decimali è, in generale, il miglior mezzo per rendere più breve ed uniforme il calcolo numerico. Dovendo per esempio eseguire una *riduzione* implicata di frazioni ordinarie non molto semplici, si convertiranno queste frazioni in decimali e si eseguiranno le operazioni come su i numeri interi. Sia da eseguirsi la riduzione,

$50\frac{2}{11} + 43\frac{7}{16} \times 1\frac{7}{16} - 12\frac{7}{16} \times \frac{1}{2} + 53\frac{1}{24} : 2\frac{7}{24}$;
svolgendo in decimali le frazioni ordinarie (§. 41) essa si cambierà nell'altra,

$50,27 + 43,317 \times 1,7327 - 12,1 \times 0,3929 + 53,25 : 2,1349$,
dalla quale, dopo eseguite le operazioni indicate, si ottiene per risultamento finale 145,52 in cui la cifra de' decimali è esatta. Ma le operazioni su i decimali esigono particolari avvertenze, specialmente allorchè suppliscono a quelle che avrebbero dovuto eseguirsi con le frazioni ordinarie.

Primieramente deve stabilirsi il *grado di approssimazione* che si desidera, cioè deve determinarsi la cifra decimale sino alla quale si vuole che sia esatto il risultamento finale. Questo grado di approssimazione dipende dalla grandezza dell'unità che si considera e dalla natura della quistione che ha dato motivo al calcolo. Per esempio se l'unità fosse il palmo e si trattasse di valutare un lavoro da muratore, basterebbe l'approssimazione di un decimo, ma bisognerebbe forse spingerla sino ai centesimi trattandosi di lavori di maggior costo, come intagli, dorature e simili. Determinata la cifra decimale sino alla quale si vuole esatto il risultamento finale, è chiaro che deve darsi al risultamento di ciascuna operazione particolare la medesima approssimazione, ed anche maggiore, affinchè gli errori accumulati in molte operazioni non sorpassino il limite assegnato. Per conseguire un tale oggetto *nell'addizione e nella sottrazione de' decimali, d'ordinario, basta dare ai numeri da aggiungersi o da sottrarsi una cifra di più di quelle che si richieggono per l'approssimazione convenuta.*

Ma nella moltiplicazione l'approssimazione da darsi ad un fattore dipende dalla grandezza dell'altro fattore. Sia in fatti da moltiplicarsi $43,31736 \dots$ per $1,73267 \dots$, e si voglia approssimare il prodotto sino a differire dal vero meno di un centesimo. Siccome per la natura della moltiplicazione il prodotto totale risulta dall'unione de' prodotti di ciascuna cifra del moltiplicatore per ciascuna cifra del moltiplicando, così, spezzando il moltiplicatore ad un certo numero di cifre decimali, l'errore che si commette sull'ultima cifra che si ritiene deve produrre una serie di errori nascenti dai prodotti dell'errore di quell'ultima cifra per tutte le cifre del moltiplicando; e lo stesso avviene nello spezzare il moltiplicando,

perchè tutte le cifre del moltiplicatore sono moltiplicate per l'errore contenuto nell'ultima cifra del moltiplicando abbreviato. Laonde per ottenere l'approssimazione stabilita, si spezzerà il moltiplicatore in modo che il prodotto di un'unità dell'ultima cifra ritenuta per tutto il moltiplicando 43,3 ... risulti minore di $\frac{1}{1000}$: ciò accade spezzando il moltiplicatore ai *diecimillesimi*, (poichè $0,0001 \times 43,3 \dots < \frac{1}{1000}$) ed allora esso diviene 1,7327 e la sua ultima cifra 7, non potendo contenere un errore maggiore di mezzo diecimillesimo (§. 43), l'errore sul prodotto totale dipendente dall'approssimazione del moltiplicatore dovrà esser minore di un mezzo centesimo. Similmente se si spezzerà il moltiplicando ai *millesimi*, dimodochè il prodotto del moltiplicatore 1,732 ... per un'unità dell'ultima cifra ritenuta, cioè per 0,001 sia minore di $\frac{1}{1000}$, l'errore dipendente dall'approssimazione del moltiplicando sarà minore di mezzo centesimo; l'errore totale sul risultamento dell'operazione sarà dunque minore di un centesimo, come si voleva. Quindi in generale *nella moltiplicazione l'approssimazione da darsi a ciascun fattore dovrà regolarsi in modo, che il prodotto di un'unità dell'ultima cifra da ritenersi nel medesimo per l'altro fattore sia minore dell'unità stabilita per l'approssimazione del prodotto finale* (*). Così, per un altro esempio, volendo il prodotto

(*) Questa regola si dimostra più agevolmente co' principii dell'Algebra. Siano M, m i due fattori esenti da ogni errore di approssimazione, e p l'unità decimale stabilita per l'approssimazione del prodotto; indicando con x, y le unità dell'ordine delle ultime cifre da ritenersi nel moltiplicando e nel moltiplicatore, e supponendo quelle ultime cifre affette del massimo errore che possono contenere, i due fattori approssimati saranno espressi da, $M \pm \frac{1}{2}x, m \pm \frac{1}{2}y$ (§. 43), onde si avrà,

$$(M \pm \frac{1}{2}x)(m \pm \frac{1}{2}y) = Mm \pm \frac{1}{2}mx \pm \frac{1}{2}My \pm \frac{1}{4}xy$$

Dunque, trascurando il termine $\pm \frac{1}{4}xy$ sempre piccolissimo, l'errore del prodotto approssimato sarà, $\pm \frac{1}{2}mx \pm \frac{1}{2}My$, e questo errore dovrà esser minore di p ; quindi la condizione da adempirsi nell'assegnare i valori d' x, y sarà espressa da,

$$\pm \frac{1}{2}mx \pm \frac{1}{2}My < p, \text{ ovvero, } \pm mx \pm My < 2p$$

E considerando con lo stesso segno i termini del primo membro di questa ineguaglianza, come potrebbe accadere nel caso più sfavorevole, essa potrà scriversi, $mx + My < 2p$. La quale relazione, contenendo due indeterminate, può esser soddisfatta in diversi modi, ma fra molte soluzioni, per trovarne una di facile applicazione, noi spezzaremo quella relazione in due, cioè

$$mx < p, My < p;$$

ed è chiaro che se saranno soddisfatte queste condizioni lo sarà pure l'altra $mx + My < 2p$; se non che i valori d' x, y che soddisfanno alle condizioni isolate dovrebbero in qualche caso prendersi più piccoli di quelli che soddisferebbero alla condizione complessiva, ciò che accresce l'approssimazione del prodotto, ma aumenta anche un poco il fastidio della moltiplicazione.

Le condizioni $mx < p, My < p$, corrispondono alla regola enunciata qui sopra, e dimostrano ancora che delle due indeterminate x, y dovrà esser minore quella che moltiplica il maggior fattore e rappresenta l'approssimazione del più piccolo, cioè che *de' due fattori il più piccolo dovrà prendersi più esatto*.

di 98,0745 ... per 0,892847 ... approssimato sino a differire dal vero meno di un centesimo, converrà moltiplicare 98,07 per 0,8928.

Rispetto alla divisione bisognerà osservare la regola seguente: *Nella divisione il dividendo potrà lasciarsi qual è, e l'approssimazione del divisore dovrà regolarsi in modo che un'unità dell'ordine dell'ultima cifra da ritenersi moltiplicata pel dividendo risulti minore del divisore moltiplicato per se stesso (o sia per un numero che gli è eguale) e pel doppio dell'unità indicante l'approssimazione del quoziente (*)*. Per esempio volendo che l'errore del quoziente di 83,24896 ... per 2,13452 ... risulti minore di un centesimo, le condizioni precedenti saranno adempite se ritenendo il dividendo qual è, si spezzerà il divisore ai millesimi; in fatti si ha

$$0,001 \times 83,2 \dots < 2,1 \dots \times 2,1 \dots \times 0,01 \times 2$$

L'osservanza di questi precetti servirà ad approssimare il prodotto

(*) Questa regola si dimostra facilmente co' principii dell'Algebra. Siano D, d il dividendo e il divisore esatti, e q l'unità stabilita per l'approssimazione del quoziente; indicando con x, y le unità dell'ordine delle ultime cifre da ritenersi nel dividendo e nel divisore, il valore approssimato dei medesimi sarà espresso da, $D \pm \frac{x}{a}, d \pm \frac{y}{a}$, onde si avrà

$$\frac{D \pm \frac{x}{a}}{d \pm \frac{y}{a}} = \left(\frac{D}{d} \pm \frac{x}{ad} \right) \left(1 \pm \frac{y}{ad} \right)^{-1} = \frac{D}{d} \pm \frac{x}{ad} \mp \frac{Dy}{ad^2} \dots$$

L'errore del quoziente approssimato sarà dunque, $\pm \frac{x}{ad} \mp \frac{Dy}{ad^2}$, che dovrà essere minore di q , e quindi la condizione da adempirsi nell'assegnare i valori di x, y sarà espressa da

$$\pm \frac{x}{ad} \mp \frac{Dy}{ad^2} < q, \text{ ovvero, } \pm \frac{x}{d} \mp \frac{Dy}{d^2} < aq$$

E considerando con lo stesso segno i termini del primo membro di questa ineguaglianza, come potrebbe accadere nel caso più sfavorevole, si avrà

$$\frac{x}{d} + \frac{Dy}{d^2} < aq. \text{ Ma siccome in una divisione, quando è fissata l'es-}$$

tensione che vuol darsi al quoziente, la difficoltà del calcolo dipende soltanto dal divisore, ed è indifferente che il dividendo sia comunque esteso, così noi potremo supporlo indefinito, o composto di tante cifre quante bisognano per ottenere il voluto numero di cifre nel quoziente, ed allora l'errore x del dividendo sarà nullo, e la condizione precedente si ridur-

$$\text{rà a } \frac{Dy}{d^2} < aq, \text{ ovvero}$$

$$yD < ad^2q,$$

la quale corrisponde alla regola data qui sopra.

o il quoziente di due decimali sino a non differire dal vero che per un'unità decimale convenuta, per esempio per $\frac{1}{100}$; ma è chiaro che volendo nel prodotto o nel quoziente esatta la cifra stessa dei centesimi, bisognerà, come si è accennato per l'addizione e la sottrazione, che l'approssimazione si estenda ad una cifra di più, cioè sino ai millesimi; e similmente se si volesse esatta la cifra dei decimi, il prodotto o il quoziente si approssimerebbe sino ai centesimi.

II. Quanto precede suppone che i numeri su i quali deve eseguirsi la moltiplicazione o la divisione siano decimali indefiniti da spezzarsi in modo che si ottenga nel prodotto o nel quoziente l'approssimazione che si desidera; per la qual cosa se que' decimali fossero terminati ed esatti, le regole date non sarebbero ad essi applicabili, e la moltiplicazione o la divisione non esigerebbe alcuna particolare avvertenza. Se però i decimali anzidetti fossero terminati, e si sapessero altronde affetti nell'ultima loro cifra dell'ordinario errore di mezza unità (nel massimo), in questo caso è chiaro che non potrebbe darsi al prodotto o al quoziente un' approssimazione a piacere, e sarebbe utile in vece di conoscere anticipatamente l'approssimazione di tali risultamenti dipendente dagli errori su i dati. Per esempio, dovendo moltiplicare 327,35 per 41,925, la regola riguardante la moltiplicazione ci avverte che, per ottenere nel prodotto l'approssimazione di un decimo, bisognerebbe che il moltiplicando fosse esteso sino a millesimi ed il moltiplicatore sino ai diecimillesimi, per cui quell' approssimazione non può aversi da due proposti numeri quando si suppongono le ultime loro cifre affette dell'errore ordinario non maggiore di mezza unità; l'approssimazione del prodotto è in vece di una unità della prima cifra degli interi, come si può verificare con l'anzidetta regola, dimodochè le cifre decimali risultanti dalla moltiplicazione saranno tutte erronee.

Ma si può assegnare un criterio generale per conoscere direttamente l'approssimazione inerente al prodotto di due decimali dati; si sopprimerà la virgola ne' due fattori, si aggiungeranno indi fra loro come se fossero numeri interi, ed il numero delle cifre di cui sarà composta la metà della somma ottenuta indicherà il numero delle cifre che dovranno risultare erronee nel prodotto, cominciando dalla destra. L'errore sarà perciò sempre minore di una unità dell'ordine della cifra posta immediatamente a sinistra delle cifre errate (*). Così il prodotto de' due de-

(*) Dalla nota a pag. 71 apparisce che l'errore del prodotto è $\frac{1}{2}mx + \frac{1}{2}My$. Ora, sopprimendo la virgola ne' due fattori essi si cambiano in numeri interi e le unità x, y dell'ordine delle loro ultime cifre acquistano lo stesso valore, per cui si ha $x=y=1$; quindi l'errore sul prodotto considerato come numero intero diviene $\frac{1}{2}(m+M)$. Un tal errore alterando le ultime cifre a destra del prodotto, tante di esse risulteranno erronee quante ne contiene la semisomma $\frac{1}{2}(m+M)$. Si desume da ciò che l'errore del prodotto sarà minore di un'unità dell'ordine della cifra posta immediatamente a sinistra delle cifre errate.

Relativamente alla divisione, la formola $\frac{\frac{1}{2}x}{d} + \frac{\frac{1}{2}yD}{d^2}$ indicante l'errore massimo del quoziente può cambiarsi in $\frac{\frac{1}{2}(dx + Dy)}{d^2}$; ma x, y dinotando

cimali 527,095, e 21,97, no' quali l'ultima cifra si suppone approssimata, non sarà esatto che fra una decina, giacchè la semisomma de' numeri 530000, 2200 essendo composta di sei cifre, altrettante cifre dovranno essere erronee a destra del prodotto, e siccome esso non può contenere se non cinque cifre decimali, così sarà erronea anche la cifra delle unità intere. Si rende ciò manifesto col fatto aggiungendo qualche altra cifra decimale ai numeri proposti ed eseguendo di nuovo la moltiplicazione, perchè tutte le cifre decimali del prodotto si vedranno variare, non meno che la cifra delle unità. E si potrebbe anche in altro modo verificare l'approssimazione già calcolata del prodotto; ammettendola cioè come vera, e cercando con la regola data di sopra a pag. 71 l'approssimazione de' due fattori, che dovrebbe coincidere con quella de' decimali proposti. Mediante questo procedimento si troverà che per ottenere nel prodotto l'approssimazione di una decina, il moltiplicatore dev' essere esteso sino a centesimi, come il numero proposto, ma il moltiplicando potrebbe esser limitato ai decimi, dimodochè l'approssimazione del prodotto dipendo, come già si è fatto osservare, dal fattore più piccolo.

Rispetto alla divisione, se il dividendo ed il divisore sono limitati, e soggetti all'ordinario errore di non più di mezza unità nell'ultima cifra, il criterio per conoscere l'approssimazione del quoziente sarà questo: *si sopprimerà la virgola nel dividendo e nel divisore, e si otterranno così due numeri interi; si dividerà la semisomma di questi numeri pel divisore moltiplicato per se stesso e pe' denominatori de' due proposti decimali, e ne risulterà una frazione che rappresenterà l'errore massimo che può ricadere sul quoziente.* (veggasi la nota a pag. prec :) Per esempio, dovendo dividere 849,3132 per 3,155, la semisomma de' numeri 8500000, 3000 sarà 4200000 circa, che divisa per $3,2 \times 3,2 \times 10000 \times 1000$ darà, $\frac{4200000}{100000000} = 0,042$; la quale frazione indica che l'errore del quoziente dev' essere sempre risultato minore di mezzo decimo. Viceversa ammettendo quest' approssimazione nel quoziente e volendo conoscere come dovrebbe spezzarsi il divisore per ottenerla, la regola data a pag. 72 c' insegna che esso deve estendersi sino ai millesimi, come sta. Osserviamo ancora che nella ipotesi attuale, in cui il dividendo ed il divisore sono limitati e soggetti ad errore nell'ultima cifra a destra, dopo aver determinata l'approssimazione del quoziente accade spesso che per la regola inversa (pag. 72) il divisore può prendersi abbreviato senza che ne soffra il quoziente, ciò che dimostra che in tal caso l'approssimazione del quoziente dipende da quella del dividendo. Per esempio se dovete dividersi 2,425 per 40,3163, l'approssimazione del quoziente, secondo la regola data qui sopra sarebbe espressa da $\frac{200000}{100000000} = \frac{1}{50000} = 0,000012$, per ottener la quale basterebbe limitare il divisore ai centesimi; in fatti il criterio prescritto dalla regola inversa (pag. 72) è $2,4 \times 0,01 < 1600 \times 2 \times 0,000012$.

Quanto si è detto della moltiplicazione e della divisione dei decimali negli articoli I e II è applicabile anche al calcolo de' numeri interi, e spesso

due unità decimali aventi rispettivamente per denominatori quelli del dividendo e del divisore, se le indicheremo con $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{r}$, l'espressione del suddetto er-

rore diverrà, $\frac{\frac{1}{r}(dr + DR)}{1/Rr}$, dove i prodotti dr, DR rappresentano il di-

visore ed il dividendo moltiplicati ciascuno pel proprio denominatore, ossia ridotti a numeri interi con la soppressione della virgola.

le regole date divengono più semplici. Così quando il dividendo ed il divisore sono numeri interi terminati, e soggetti ad errore nell'ultima cifra a destra, l'approssimazione del quoziente si ottiene dividendo la somma del dividendo e del divisore pel divisore moltiplicato per se stesso; o se il divisore si suppone esatto, ed approssimato il dividendo, l'approssimazione del quoziente sarà espressa dall'unità divisa pel doppio del divisore (*).

III. Le regole precedenti mentre assicurano ai risultamenti della moltiplicazione e della divisione il grado di approssimazione stabilito, rendono spesso più semplici le operazioni, perchè escludono da' numeri proposti le cifre decimali che non sono necessarie per ottenere la richiesta approssimazione. Così se il prodotto de' decimali 0,15643, e 0,04358 si volesse approssimare sino a differir dal vero meno di un millesimo, basterebbe, per ciò che si è detto, moltiplicare 0,16 per 0,044; ed allo stesso modo il quoziente di 54256 per 295674, approssimato sino ad un millesimo si otterrà eseguendo la divisione col divisore molto più semplice 296 (**). Ma la moltiplicazione e la divisione possono anche abbreviarsi notabilmente nel loro andamento quando è stabilito il grado di approssimazione del prodotto o del quoziente.

(*) Nel caso de' numeri interi la formola $\frac{\frac{x}{2}(dx+Dy)}{d^2}$ diviene $\frac{\frac{x}{2}(d+D)}{d^2}$ per essere $x=y=1$; e quando il divisore è esatto, $y=0$, per cui l'approssimazione del quoziente è rappresentata da $\frac{\frac{x}{2}dx}{d^2} = \frac{x}{2d}$. In quest'ultima supposizione si vede che l'approssimazione del quoziente è indipendente da dividendo.

Il signor Bourdon, in una nota riportata in fine della decimasesta edizione de' suoi *Elementi di Aritmetica*, ottiene con un metodo abbastanza complicato le sole regole per riconoscere l'approssimazione di un prodotto o di un quoziente di numeri interi terminati e soggetti ad errore nell'ultima cifra. Quantunque i criterii da lui assegnati presentino una certa uniformità, noi crediamo più facili a ritenersi le formole, che sono anche esenti da eccezioni; ed altronde l'andamento molto più semplice da noi seguito abbraccia le regole dirette ed inverse di approssimazione, e riguarda il calcolo de' decimali non meno che degli interi.

(**) In questo secondo esempio, sostituendo per brevità il numero rotondo 300000 al divisore 295674, la condizione che serve a determinare il luogo dell'ultima cifra da ritenersi nel medesimo è,

$$1000 \times 54000 < 9000000000 \times 2 < 0,001$$

dalla quale apparisce che l'ultima cifra da ritenersi nel divisore è quella delle migliaia.

È notabile che lo regola esposto qui sopra per la moltiplicazione e la divisione de' decimali sono comunemente trascurato ne' trattati di Aritmetica; ma ognun vede di quanta importanza esse siano ed in quali errori si possa cadere senza la loro guida, cui solo una lunga abitudine nel calcolo numerico potrebbe supplire. Altronde non pare che le suddette regole potessero trovar luogo in altra parte del corso elementare di matematiche.

Sia per esempio da eseguirsi la moltiplicazione de' due decimali 54,317 ed 1,7592, con doversi approssimare il prodotto sino ad un centesimo. È chiaro che l'operazione sarebbe abbreviata se in ciascun prodotto parziale non si tenesse conto che de' centesimi o delle unità superiori; ma siccome i millesimi trascurati potrebbero sommare a più centesimi, così bisognerà porre a calcolo anche i millesimi tralasciando le rimanenti cifre. Ora, per limitare i prodotti parziali ai soli millesimi, dovrà disporsi l'operazione come qui appresso;

$$\begin{array}{r}
 54,317 \\
 29\ 571 \\
 \hline
 54\ 317 \text{ millesimi} \\
 38\ 022 \\
 2\ 715 \\
 489 \\
 11 \\
 \hline
 95,554
 \end{array}$$

dove si è rovesciato il moltiplicatore 1,7592, e la sua cifra 9 de' millesimi si è situata sotto alla cifra 4 delle unità del moltiplicando. In tal guisa il prodotto di ciascuna cifra del moltiplicatore per la superiore corrispondente del moltiplicando dovrà dare *millesimi*; perocchè mentre le cifre del moltiplicando crescono al solito da destra a sinistra e diminuiscono da sinistra a destra, le sottoposte cifre del moltiplicatore rovesciato seguono un andamento opposto, onde il denominatore del prodotto di ciascuna cifra del moltiplicatore per la superiore corrispondente del moltiplicando rimane costante ed eguale a mille, come quello del prodotto della cifra 9 de' millesimi per la superiore cifra 4 dello unità da cui si parto, e dal quale dipendono tutti gli altri. Per esempio la cifra 5 del moltiplicatore esprime centesimi o la superiore corrispondente del moltiplicando esprime decimi, ed è chiaro che i centesimi moltiplicati pei decimi danno *millesimi*.

Dopo aver data ai due fattori la disposizione ora indicata si esegue la moltiplicazione principiando dalla destra, ma nel formare ciascun prodotto parziale s'incomincia dalla cifra del moltiplicando posta nella medesima colonna della cifra del moltiplicatore che si considera; così il prodotto parziale corrispondente alla cifra 5 del moltiplicatore si comincia dalla cifra 5 del moltiplicando posta nella medesima colonna del 5. A fine però di non trascurare interamente i millesimi provenienti dalle cifre tralasciate, in ogni prodotto parziale si tien conto delle unità che si riporterebbero se s'incominciassero la moltiplicazione dalla cifra del moltiplicando immediatamente a destra di quella adottata. Per esempio, il prodotto parziale corrispondente alla cifra 7 del moltiplicatore dovrà cominciare con la moltiplicazione di 7 per 1, che dà 7, ma a questo numero si aggiungeranno 5 unità provenienti dalla moltiplicazione di 7 per 7, che dà 49 *decimillesimi*, i quali, secondo la regola del §. 43, si valutano per 5 *millesimi*. Allo stesso modo il quarto prodotto parziale relativo alla cifra 9 dovrà incominciare con la moltiplicazione di 9 per 4 che fa 36, ma questo numero sarà accresciuto di 3 unità provenienti dalla moltiplicazione di 9 per 3, che dà 27 *decimillesimi*, in vece de' quali si prendono 3 *millesimi*. Finalmente i prodotti parziali si disporranno uno sotto all'altro come nell'addizione, perchè ciascuno di essi esprime millesimi, e la loro somma darà il prodotto totale, in cui la penultima cifra a destra deve considerarsi esente dell'errore derivante dal modo abbreviato di eseguire l'operazione.

Aggiungeremo per maggior chiarezza i seguenti esempi, nel primo de' quali

si è calcolato il prodotto de' decimali 565,09494609; 339,9620492 esatto sino ai *centomillesimi*, nel secondo il prodotto de' decimali 4836,6058; 3486,72 esatto sino ai *centesimi*, e nel terzo il prodotto de' numeri interi 459491, 69785 esatto sino ai *milioni*: avvertendo che in quest' ultimo si è situata la cifra delle unità del moltiplicatore rovesciato sotto allo centinaia di migliaia del moltiplicando, affinché tutti i prodotti parziali esprimessero centinaia di migliaia, e che in ciascun esempio si è sempre calcolata, como è di regola, una cifra di più dell'approssimazione richiesta, la quale cifra superante si è marcata con un puntino.

565,09494609 29 40269953	4836,605800 276843	459491 58796
1695 28483827 <i>millesimi</i>	14509 817400 <i>millesimi</i>	275695 <i>centinaja</i>
282 54747304	1934 642320	41354 <i>di migliaia</i>
50 85854514	385 928464	3216
5 08385451	29 019635	367
33905695	3 385623	23
1130190	96732	
22604	16863890,174	320655
5085		52065 <i>milioni</i>
113		
203412,734784		

Da ciò che si è detto ne' numeri I, II, si comprende facilmente che, se col metodo abbreviato qui sopra esposto volessero moltiplicarsi fra loro due decimali indefiniti, e fosse determinata l'approssimazione da darsi al prodotto, bisognerebbe prima di tutto spezzare i due fattori secondo la regola data nel n.º I, ed eseguire poi l'operazione compendiata sulle cifre ritenute. Se poi i due decimali saranno terminati, ed affetti nelle loro ultime cifre dell'ordinario errore di mezza unità (nel massimo), prima di eseguire la moltiplicazione, si dovrà, col criterio assegnato nel n.º II, calcolare l'approssimazione inerente al prodotto, a fine di non estendere l'operazione abbreviata alle cifre che di loro natura non potrebbero riuscire esatte.

La divisione de' decimali è suscettibile di un' abbreviazione analoga. Ma siccome una divisione qualunque è tanto più complicata quanto più grande è il divisore, così in questa operazione l'abbreviazione consiste in renderlo più semplice; ed è chiaro che si conseguirà l'oggetto se in vece di abbassare una dopo l'altra le cifre del dividendo per continuare la divisione, si sopprimeranno successivamente le ultime cifre a destra del divisore. Dovranno però usarsi alcune avvertenze affinché un tal procedimento non pregiudichi all'esattezza del quoziente.

Prima di tutto si ridurrà la divisione di due decimali a quella di un decimale per un intero (§. 42); stabilita poi l'approssimazione da darsi al quoziente, si calcolerà il numero delle cifre significative che esso deve contenere, avvertendo di contare sempre una cifra di più di quelle che si richieggono per l'approssimazione convenuta. Con questo dato la soppressione successiva delle cifre a destra del divisore si regolerà in modo che per l'ultima divisione parziale non rimangano meno di due cifre nel divisore. Finalmente nel moltiplicare ciascuna cifra del quoziente pel divisore abbreviato, si aggiungeranno al prodotto di quella cifra per la prima cifra a destra del divisore le unità che si riporterebbero dal prodotto precedente se si fosse conservata nel divisore una cifra di più.

Quanto vien prescritto in questa regola non ha bisogno di dimostrazione, per cui ci tratterremo soltanto a mostrarne l'applicazione con alcuni esempi. Sia da dividersi 21785,913925 per 4354,25 e si voglia il quoziente esatto sino ai millesimi. La divisione si ridurrà a quella di 2178591,3925 per 435425, ed affinchè risulti esatta la cifra de' millesimi bisognerà estendere il quoziente sino ai diecimillesimi: perciò esso dovrà contenere cinque cifre o saranno necessarie altrettante divisioni parziali per ottenerle; e siccome il divisore contiene sei cifre si potrà incominciare l'operazione ritenendolo come sta, perchè con la soppressione successiva di una cifra alla sua destra, dopo quattro divisioni parziali, ne rimarranno due per l'ultima divisione, come prescrive la regola. Debba inoltre dividersi 27,9135 per 519,346, e si voglia estendere il quoziente sino ai centomillesimi. Riducendo il divisore a numero intero, la divisione si cangerà in quella di 27913,5 per 519346, e si vede che il quoziente dovrà contenere quattro cifre significative ed esigerà quattro divisioni parziali. Si potrà dunque incominciare l'operazione ritenendo sole cinque cifre del divisore, giacchè con la soppressione di tre cifre dopo tre divisioni parziali, ne rimarranno due per la quarta ed ultima divisione. Finalmente dovendo dividere 97527,369 per 428,23, ovvero 9752736,9 per 42823, se si vorrà esteso il quoziente sino ai millesimi, esso dovrà contenere sei cifre, per cui non si potranno incominciare a sopprimere le cifre del divisore se non dopo aver trovate tre cifre del quoziente. *In generale s' incominceranno a sopprimere le cifre a destra del divisore quando rimarranno a trovarsi nel quoziente tante cifre quante ne contiene il divisore meno due.* Ripor-
tiamo qui appresso il calcolo degli accennati tre esempi nel quale non abbiamo tralasciato di registrare le sottrazioni per mostrare come si formano i prodotti delle cifre del quoziente pel divisore abbreviato.

$\begin{array}{r} 2178591,3925 \\ \underline{2177125} \\ 1466 \\ \underline{1306} \\ 160 \\ \underline{130} \\ 30 \end{array}$	$\begin{array}{r} 435425 \\ \hline 5,0033 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27913,5 \\ \underline{25967\ 3} \\ 1946\ 2 \\ \underline{1558\ 0} \\ 388\ 2 \\ \underline{363\ 5} \\ 24\ 7 \\ \underline{20\ 8} \\ 39 \end{array}$	$\begin{array}{r} 519346 \\ \hline 0,05374 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9752736,9 \\ \underline{85646} \\ 118813 \\ \underline{85646} \\ 331676 \\ \underline{299761} \\ 31915 \\ \underline{29976} \\ 1939 \\ \underline{1713} \\ 226 \\ \underline{214} \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 42823 \\ \hline 227,745 \end{array}$
--	--	--	---	--	--

Per la divisione, come per la moltiplicazione, se i decimali su i quali deve effettuarsi l'operazione abbreviata saranno indefiniti, o sia determinata l'approssimazione da darsi al quoziente, converrà prima di tutto spezzare il dividendo ed il divisore in conformità della regola data nel n.º 1, ed indi eseguire la divisione compendiata sulle cifre ritenute. Ma se il dividendo ed il divisore fossero terminati, ed effetti dell'errore ordinario non maggiore di mezza unità nell'ultima cifra, in tal caso, prima di eseguire la divisione si dovrà, col criterio assegnato nel n.º 11, calcolare l'approssimazione

di cui è suscettivo il quoziente, e con questo dato intraprendere l'operazione compendiata.

IV. Abbiamo detto (n.º I.) che in generale l'uso de' decimali rende più breve ed ordinato il calcolo numerico, ma qualche volta accade in vece che alcune frazioni ordinarie semplicissime possano con vantaggio sostituirsi alle frazioni decimali corrispondenti. La divisione dell'unità in 2, 4 ed 8 parti dà origine a molte di queste abbreviazioni. Si sa che le frazioni decimali 0,5; 0,25; 0,125 equivalgono ad $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$; quindi la moltiplicazione di un numero qualunque per 0,5; 0,25; 0,125, equivale alla moltiplicazione per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ che si cambia nella divisione per 2 per 4, o per 8; e viceversa la divisione per 0,5; 0,25; 0,125 si cambia nella moltiplicazione per 2, 4, ed 8. E siccome la moltiplicazione o la divisione di un numero per l'unità seguita da zeri non importa che il trasporto della virgola verso destra o verso sinistra (§. 39), così le operazioni di moltiplicare o dividere un numero qualunque per 5, 25, 125 saranno anche rese più facili mutandole nelle altre di dividere o moltiplicare lo stesso numero per 2, 4, 8, e moltiplicarlo o dividerlo contemporaneamente per 10, 100, 1000. Ciò posto, indicando con N un qualsivoglia numero, si comprenderanno facilmente le relazioni che seguono,

$$\begin{aligned} N \times 5 &= \frac{N \times 10}{2}, & N : 5 &= \frac{N \times 2}{10} \\ N \times 25 &= \frac{N \times 100}{4}, & N : 25 &= \frac{N \times 4}{100} \\ N \times 125 &= \frac{N \times 1000}{8}, & N : 125 &= \frac{N \times 8}{1000} \\ N \times 75 &= N \times 100 \times \frac{3}{4}, & N : 75 &= \frac{N}{100} \times \frac{4}{3} \\ N \times 625 &= \frac{N}{2} \times \frac{10000}{8}, & N : 625 &= \frac{N \times 16}{10000}; \end{aligned}$$

dalle quali si ricavano anche le altre,

$$\begin{aligned} N \times 2\frac{1}{2} &= \frac{N \times 10}{4}, & N : 2\frac{1}{2} &= \frac{N \times 4}{10} \\ N \times 12\frac{1}{2} &= \frac{N \times 100}{8}, & N : 12\frac{1}{2} &= \frac{N \times 8}{100} \\ N \times 7\frac{1}{2} &= N \times 10 \times \frac{3}{4}, & N : 7\frac{1}{2} &= \frac{N}{10} \times \frac{4}{3} \\ N \times 62\frac{1}{2} &= \frac{N}{2} \times \frac{1000}{8}, & N : 62\frac{1}{2} &= \frac{N \times 16}{1000} \\ N \times 6\frac{1}{4} &= \frac{N}{2} \times \frac{100}{4}, & N : 6\frac{1}{4} &= \frac{N \times 16}{100} \end{aligned}$$

Sarà facile applicare queste regole secondo le circostanze. Per esempio il prodotto di 31246 per 33125 si ridurrà a quello di 31246000 per 33 $\frac{1}{2}$, moltiplicando il primo e dividendo il secondo fattore per 1000, come è permesso (§. 40); il quoziente di 425475 per 125 si otterrà moltiplicando 4254 $\frac{3}{4}$ per 8, e dividendo il prodotto per 10, e simili.

Le frazioni decimali periodiche nascenti dalla divisione per 3, 6, 7 ec. è chiaro che saranno anche supplite con vantaggio dalle frazioni ordinarie corrispondenti. Così se dovesse moltiplicarsi 401,666 ... per 54,133 ... sarebbe molto più facile eseguire l'operazione su i numeri $40\frac{1}{3}$, $54\frac{1}{3}$, che si ottengono dividendo il primo e moltiplicando il secondo per 10 (§. 40), e mutando le frazioni decimali in ordinario. Parimente alla divisione di 35,63777 ... per 5,4222 si sostituirà con vantaggio quella di $35,63\frac{7}{9}$ per $5,4\frac{2}{9}$ (§. 44) che, moltiplicando per 9 ed omettendo il comune denominatore, si muta nell'altra di 320,74 per 48,8. Il cambiamento delle frazioni decimali periodiche in frazioni ordinarie è quasi sempre necessario per la brevità de' calcoli, poichè quelle frazioni decimali progredendo all'infinito, le regole date nel n.º I. per assicurare ai risultamenti delle operazioni l'approssimazione che si domanda condurrebbero spesso all'uso di un gran numero di cifre decimali.

Qualche volta la moltiplicazione o la divisione di un numero N per un intero unito a frazione si può cambiare in una operazione più semplice; ecco alcune relazioni di questo genere,

$$\begin{aligned} N \times 3\frac{1}{3} &= \frac{N \times 10}{3}, & N : 3\frac{1}{3} &= \frac{N \times 3}{10} \\ N \times 33\frac{1}{3} &= \frac{N \times 100}{3}, & N : 33\frac{1}{3} &= \frac{N \times 3}{100} \\ N \times 16\frac{2}{3} &= \frac{N \times 100}{6}, & N : 16\frac{2}{3} &= \frac{N \times 6}{100} \\ N \times 13\frac{1}{3} &= N \times 10 \times \frac{4}{3}, & N : 13\frac{1}{3} &= \frac{N}{10} \times \frac{3}{4} \\ N \times 11\frac{1}{3} &= N \times 10 \times \frac{4}{3}, & N : 11\frac{1}{3} &= \frac{N}{10} \times \frac{3}{4} \\ N \times 8\frac{1}{3} &= N \times 10 \times \frac{2}{3}, & N : 8\frac{1}{3} &= \frac{N}{10} \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

È da notarsi che le moltiplicazioni per $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$ che s'incontrano nelle precedenti espressioni possono eseguirsi con molta facilità. La moltiplicazione di un numero per $\frac{2}{3}$ si esegue togliendo da quel numero la sua quarta parte, e la moltiplicazione per $\frac{4}{5}$ si riduce ad aggiungere al numero stesso la sua terza parte; similmente il prodotto per $\frac{6}{7}$, o per $\frac{8}{9}$, si ottiene togliendo dal dato numero la sua settima parte, o aggiungendogli la sua sesta parte.

La moltiplicazione per 0,9, o per 0,99; 0,999 etc. si riduce anche immediatamente ad una sottrazione, e questa abbreviazione è molto utile in alcuni casi; si moltiplica per 0,9 togliendo dal dato numero la sua decima parte che si ottiene trasportando la virgola di un luogo a destra, ed allo stesso modo il prodotto di un numero per 0,99; 0,999, si forma togliendone la centesima o la millesima parte. Similmente si moltiplicherà un numero per 9, 99, 999 etc. aggiungendo ad esso uno, due, o tre zeri e sottraendo dal numero risultante il numero proposto; e quindi facilmente si comprenderanno le seguenti relazioni, nelle quali viene indi-

cato il modo di abbreviare le moltiplicazioni per 18, 198, 1998 etc. 27, 297, 2997 etc.; 36, 396, 3996 etc.

$$\begin{aligned} N \times 9 &= N \times 10 - N, & N \times 99 &= N \times 100 - N, \\ N \times 18 &= N \times 2 \times 10 - N \times 2, & N \times 198 &= N \times 2 \times 100 - N \times 2, \\ N \times 27 &= N \times 3 \times 10 - N \times 3, & N \times 297 &= N \times 3 \times 100 - N \times 3, \\ N \times 36 &= N \times 4 \times 10 - N \times 4, & N \times 396 &= N \times 4 \times 100 - N \times 4. \end{aligned}$$

Finalmente i principii generali enunciatì ne' §. 40, e 42 potranno servire in molti altri casi ad abbreviare la moltiplicazione e la divisione, specialmente se si avrà riguardo anche a ciò che si è detto qui sopra. Così la moltiplicazione di 241632 per 17625, moltiplicando più volte di seguito il primo fattore e dividendo il secondo per 5, si riduce a quella più semplice di 6040800 per 705, ovvero di 60408000 per 70 $\frac{1}{2}$; e la divisione di 5827.4 per 1875, moltiplicando successivamente il dividendo ed il divisore per 2 si cambia in quella di 2331016 per 7500, ovvero di 233,1016 per $\frac{1}{4}$, che si esegue aggiungendo al numero 233,1016 la sua terza parte.

FORMAZIONE DEL QUADRATO E DEL CUBO, ED ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA E DELLA RADICE CUBICA DE' NUMERI.

§. 46.

Del quadrato e del cubo, della radice quadrata e della radice cubica.

Si chiama *quadrato* di un numero il prodotto di quel numero per se stesso ossia per un numero che gli è eguale; e dicesi *cubo* di un numero il prodotto di quel numero moltiplicato successivamente per se stesso due volte, ovvero il prodotto di tre fattori eguali al numero proposto. Segue da ciò che il cubo di un numero è pure il prodotto del numero stesso pel suo quadrato. Per esempio 4 è il *quadrato* di 2, perchè $2 \times 2 = 4$; ed 8 è il *cubo* di 2, perchè $2 \times 2 \times 2 = 8$; o, ciò che vale lo stesso, perchè $2 \times 4 = 8$. La formazione del quadrato e del cubo de' numeri si riduce dunque ad una moltiplicazione, la quale non differisce dall'ordinaria se non nella circostanza che i numeri da moltiplicarsi sono eguali fra loro.

I quadrati ed i cubi de' numeri di una sola cifra sono i seguenti.

Numeri . . . 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Quadrati . . . 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

Cubi 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729

Avendo ben compreso il modo di formare il quadrato ed il cubo, sarà facile concepire il significato di *radice quadrata* e di *radice cubica*. Per *radice quadrata* di un dato numero s'intende un tale altro numero che moltiplicato per se stesso, ovvero, come suol dirsi, *innalzato a quadrato*, dà per risultamento il numero proposto. Similmente la *radice cubica* di un numero dato è un numero tale che moltiplicato due volte per se stesso, o *innalzato a cubo*, produce il numero proposto. Nel quadro precedente i numeri semplici contenuti nella prima linea sono radici quadrate de' corrispon-

dentî numeri della seconda linea, e radici cubiche de' numeri posti nella terza linea. Così 6 è radice quadrata di 36, e nello stesso tempo radice cubica di 216; perchè 36 nasce da 6 moltiplicato per 6, e 216 risulta da 6 moltiplicato per 6, ed una seconda volta per 6. Si osservi che il quadrato ed il cubo dell'unità, come pure le sue radici quadrata e cubica sono invariabili ed eguali sempre alla stessa unità.

Il quadrato ed il cubo di una frazione si formano come quelli de' numeri interi, moltiplicando la frazione proposta una o due volte per se stessa.

Per esempio, il quadrato di $\frac{3}{4}$ è, $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$, ed il cubo di $\frac{3}{4}$ è, $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$. Viceversa la frazione $\frac{3}{4}$ è radice quadrata di $\frac{9}{16}$, e radice cubica di $\frac{27}{64}$. E notabile che *il quadrato o il cubo di una frazione è necessariamente un'altra frazione, e non potrebbe mai essere un numero intero.* In fatti si supponga la proposta frazione ridotta alla sua

più semplice espressione, com'è sempre permesso, e sia $\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 7}$: sciogliendo i

sui termini ne' loro fattori semplici essa prenderà l'aspetto di $\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 7}$ (§. 19),

ed il suo quadrato sarà rappresentato da $\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 7} \times \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 7} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 7} =$

$\frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}$; nè i termini della frazione data o quelli del quadrato

potranno essere espressi per mezzo de' loro divisori semplici in modo diverso dal qui indicato (§. 19). Or essendo la frazione proposta ridotta ai suoi minimi termini, non potrà aver fattori comuni al numeratore ed al denominatore, e siccome il numeratore ed il denominatore della frazione quadrato non contengono rispettivamente se non gli stessi fattori del numeratore e denominatore della frazione data replicati, così nemmeno la frazione quadrato conterrà fattori comuni al numeratore ed al denominatore, onde dovrà ancor essa considerarsi ridotta alla sua più semplice espressione. Dunque il quadrato di una frazione irriducibile è pure una frazione irriducibile, e però essenzialmente diversa da un numero intero. Con lo stesso ragionamento si dimostrerà che il cubo di una frazione irriducibile è parimente una frazione irriducibile, ed è chiaro che ciò che si è detto per le frazioni vere vale egualmente per le frazioni spurie.

Riflettiamo inoltre che di tutti i numeri compresi fra 1 ed 81 nove soltanto sono quadrati di numeri interi, siccome apparisce dal quadro riportato di sopra; e gli altri numeri intermedi devono aver per radice un intero unito ad una frazione. Così il numero 7 è maggiore del quadrato di 2 e minore del quadrato di 3, per cui il numero che moltiplicato per se stesso darebbe per prodotto il 7 dev'essere maggiore di 2 e minore di 3, cioè dev'essere eguale a 2 più una frazione. Ma questa frazione è di natura affatto diversa da quelle considerate sinora ne' calcoli aritmetici, poichè qualunque frazione, ordinaria, decimale o decimale periodica, potrebbe sempre mettersi sotto la forma di una frazione ordinaria irriducibile, la quale aggiunta all'intero 2 darebbe per somma anche una frazione irriducibile (§. 18), e si è veduto pocanzi che il quadrato di una tal frazione non potrebbe esser mai un numero intero, come il 7. Dunque la radice quadrata di ogni numero intero, il quale non risulti dalla moltiplicazione di un altro numero intero per se stesso, è una quantità di nuovo genere diversa dagli interi e dalle frazioni, e prende il nome di quantità o numero *irrazionale*; per formarsene una idea potrebbe considerarsi come un decimale che non finisce mai, e di cui il periodo ha un numero infinito di cifre.

Allo stesso modo tutti i numeri interi compresi fra 1 ed 8, fra 8 e 27, fra 27 e 64 etc. non hanno per radice cubica nè un intero, nè un intero unito a frazione, ma la radice cubica di tali numeri è ancor essa *irrazionale*. L'irrazionalità delle radici quadrate è però di diversa natura della irrazionalità delle radici cubiche, come altrove si dimostra.

Per brevità di scrittura, in vece d'indicare il quadrato di un numero N con $N \times N$, si suol dire con N^2 , ed anche l'indicazione del cubo si abbrevia scrivendo N^3 in vece di $N \times N \times N$. Il segno $\sqrt{}$ posto avanti ad un numero serve per indicarne la radice quadrata, ed il segno $\sqrt[3]{}$ la radice cubica. Le seguenti uguaglianze faranno meglio comprendere l'uso delle convenzioni accennate.

$$3^2 = 3 \times 3 = 9, 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64; \sqrt{9} = 3, \sqrt[3]{64} = 4$$

§. 47.

Estrazione della radice quadrata dai numeri.

L'operazione che ha per oggetto la ricerca della radice quadrata o cubica di un dato numero si chiama *estrazione di radice*; *estrarre* la radice quadrata da un numero dato significa dunque trovare quella radice. L'estrazione della radice quadrata dipende dalla formazione del quadrato della somma di due numeri; ma perchè occorre qualche volta di trovare anche il quadrato di una differenza, sarà utile premettere i seguenti principii.

Abbiamo già veduto come più operazioni successive possono indicarsi per mezzo dei segni improntati dall'Algebra (§. 11), e relativamente all'addizione ed alla sottrazione, finchè i numeri da sommarsi o da sottrarsi si considerano isolatamente, il segno $+$ servirà ad indicare l'addizione ed il segno $-$ la sottrazione. Dovendo per esempio aggiungere il numero 7 al 5, e togliere dalla loro somma il 9, ed a ciò che rimane aggiungere il 10, è chiaro che queste operazioni successive saranno con esattezza indicate nell'espressione $5 + 7 - 9 + 10$. È evidente altresì che in una *riduzione qualunque*, $5 + 7 - 9 + 10 - 11 + 27$, si possono senza inconveniente eseguire prima tutte le addizioni e poi le sottrazioni; perocchè le quantità da aggiungersi al primo numero 5 saranno sempre 7, 10, 27, e le quantità da sottrarsi saranno 9, 11, e prima o dopo che si aggiungano le une o si sottraggano le altre, il risultamento finale delle operazioni non potrà in alcun modo variare. Quindi la suddetta riduzione potrà scriversi anche così, $5 + 7 + 10 + 27 - 9 - 11$.

Ma quando l'addizione o la sottrazione devono eseguirsi fra espressioni composte di due o più numeri uniti fra loro con diversi segni, allora per indicare convenientemente il complesso di quelle molteplici operazioni sono necessarie alcune particolari avvertenze. E siccome ciò che diremo in proposito può applicarsi ai numeri non meno che ad ogni altra specie di quantità, così per dinotare quelle grandezze più generalmente ci serviremo delle lettere dell'alfabeto (*).

1.° Se alla quantità b voglia aggiungersi la differenza $a - c$, si dovrà scrivere $b + a - c$; perchè aggiungere $a - c$ a b è lo stesso che

(*) Per coloro i quali volessero studiare la Geometria prima dell'Algebra abbiamo creduto utile d'introdurre in questi *Elementi* quanto si legge nel supplemento al trattato di Aritmetica di Lacroix, distribuendo le teoriche ne' luoghi che ci son sembrati più appropriati a riceverle.

aggiungere b ad $a - c$, e questa addizione s'indica scrivendo $a - c + b$, la quale espressione, per ciò che si è osservato qui sopra, equivale a $b + a - c$, dove l'addizione è indicata prima della sottrazione.

2.^o Se dalla quantità b si dovrà togliere $a - c$, bisognerà scrivere, $b - a + c$. In fatti è chiaro che la differenza di due quantità non varia se a ciascuna di esse si aggiunga una medesima quantità; aggiungasi c a ciascuna delle proposte quantità, ed esse diverranno $b + c$, ed $a - c + c$, ossia a , perchè la quantità c aggiunta e sottratta si annulla. Dunque in vece di togliere $a - c$ da b , torna lo stesso togliere a da $b + c$, e si avrà $b + c - a$, che è la medesima cosa di $b - a + c$.

3.^o Rispetto alla moltiplicazione, si è già veduto (§. 17) che il prodotto della somma di due numeri per la somma di due altri è composto di quattro prodotti, ed applicando ciò che si è detto (pag. 35) al caso in cui le due somme sono eguali, si otterrà la forma del prodotto di $a + b$ per $a + b$; cioè il quadrato di $a + b$ sarà così composto,

$$a \times a + b \times a + a \times b + b \times b :$$

la quale espressione, riflettendo che $b \times a$ è lo stesso di $a \times b$ (§. 8) si può scrivere in quest'altro modo

$$a^2 + a \times b + a \times b + b^2 ;$$

ed indicando per brevità con $2a \times b$ il prodotto $a \times b$ ripetuto, e con $(a + b)^2$ il quadrato di $a + b$ si avrà finalmente

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2.$$

Dunque il quadrato della somma di due quantità è composto del quadrato della prima, più il doppio del prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda. Così, considerando il numero 12 compost di due numeri 3 e 9, il suo quadrato sarà composto

del quadrato di 3, ovvero	9
di due volte 3×9 , ovvero	54
del quadrato di 9, ovvero	81
Totale	144

4.^o Il prodotto di c per $a - b$ è espresso da $c \times a - c \times b$. Imperciocchè se rappresenteremo la differenza $a - b$ con d , avremo evidentemente $a = b + d$, e quindi il prodotto di c per a sarà la stessa cosa del prodotto di c per $b + d$: ma dal §. 17 si desume che il prodotto di c per $b + d$ è composto de' due prodotti $c \times b$, $c \times d$; dunque sarà $c \times a = c \times b + c \times d$. E poichè togliendo da due quantità eguali la stessa quantità i resti sono eguali, se toglieremo dall'una e dall'altra parte il prodotto $c \times b$ avremo $c \times a - c \times b = c \times d$, la quale eguaglianza esprime la proposizione enunciata, perchè $d = a - b$.

5.^o Sia da moltiplicarsi la differenza $a - b$ per la somma $a + b$. Il prodotto di a per $a - b$ sarà, pel n.^o precedente, $a \times a - a \times b$ ovvero $a^2 - a \times b$, ed il prodotto di b per $a - b$ sarà $a \times b - b^2$; ma la differenza $a - b$ deve ripetersi prima a volte e poi b volte nel prodotto totale di $a - b$ per $a + b$, dunque esso sarà, $a^2 - a \times b + a \times b - b^2$, ossia $a^2 - b^2$. Quindi il prodotto della somma di due quantità per la loro differenza eguaglia la differenza de' loro quadrati. Se $a = b + 1$, la differenza $a - b$ è eguale ad 1, ed il prodotto di $a - b$ per $a + b$ risulta eguale ad $a + b$, perchè qualunque grandezza moltiplicata per l'unità rimane la stessa (pag. 24); dunque in tal caso la differenza de' quadrati de' due numeri a , b è uguale alla somma delle radici. Da questa proprietà deriva che nella serie de' quadrati de' numeri naturali (§. 46) la differenza di due quadrati prossimi eguaglia la somma de' numeri corrispondenti posti nella prima linea.

6.° Finalmente per moltiplicare $a-b$ per $a-b$ si ponga $a-b=d$, ed il prodotto di d per $a-b$ sarà espresso da $d \times a - d \times b$; ma il prodotto di d per a ossia di $a-b$ per a è eguale ad $a^2 - a \times b$, e quello di d per b è eguale ad $a \times b - b^2$, dunque dal prodotto $a^2 - a \times b$ dovrà togliersi l'altro $a \times b - b^2$, e questa sottrazione, pel n.° 2.°, darà

$$a^2 - a \times b - a \times b + b^2$$

o più brevemente, $a^2 - 2a \times b + b^2$: cioè, il quadrato della differenza di due quantità eguaglia il quadrato della prima, più il quadrato della seconda, meno il doppio del prodotto della prima per la seconda.

Ciò premesso passiamo ad esporre il metodo di estrarre la radice quadrata da un numero qualunque. Riflettiamo primieramente che il quadrato di un numero di una sola cifra non può contenerne più di due, siccome apparisce dal quadro del §. 45; il quadrato di un numero di due cifre non può contenerne più di quattro, perchè 10000 che è il più piccolo numero di cinque cifre è quadrato di 100 che ne contiene tre; il quadrato di un numero di tre cifre non può contenerne più di sei, perchè 1000000 che è il più piccolo numero di sette cifre è quadrato di 1000 che ne contiene quattro, e così di seguito. Per conseguenza dovendo estrarre la radice quadrata da un numero qualunque, si potrà a primo aspetto conoscere di quante cifre essa deve esser composta, poichè se il numero dato avrà una o due cifre la sua radice ne avrà una, se avrà tre o quattro cifre la radice ne avrà due, se avrà cinque o sei cifre la radice ne avrà tre etc.

Esaminiamo ora la composizione del quadrato di un numero di due cifre, applicando i principii esposti di sopra intorno alla formazione del quadrato di una somma. Consideriamo, per esempio, il numero 47 decomposto in due parti, cioè in 4 decine e 7 unità, e la somma $40 + 7$ potrà paragonarsi ad $a+b$, e si potrà supporre $a=40$, $b=7$, onde si avrà,

$$\begin{array}{rcl} a^2 = 40^2 & \dots\dots\dots & = 1600 \\ 2 \times a \times b = 2 \times 40 \times 7 & = 80 \times 7 & = 560 \\ b^2 = 7^2 & \dots\dots\dots & = 49 \\ \hline \text{Totale } (a+b)^2 = 47^2 & \dots\dots\dots & = 2209 \end{array}$$

Il quadrato di 47 si compone dunque di tre parti, cioè del quadrato delle decine, del doppio del prodotto delle decine per le unità (che pel §. 40 è la stessa cosa del doppio delle decine moltiplicato per le unità), e del quadrato delle unità; il quadrato 1600 delle decine non contiene cifre significative di un ordine inferiore alle centinaia, nè potrebbe mai contenerne, perchè la moltiplicazione di decine per decine dà necessariamente centinaia; ed il doppio del prodotto delle decine per le unità non contiene cifre significative di un ordine inferiore alle decine, perchè la moltiplicazione di decine per unità produce decine (*). Queste osservazioni bastano per farci distinguere nel quadrato totale 2209 le varie parti di cui è composto, cioè bastano a guidarci nella estrazione della sua radice, imperciocchè si separino due cifre a destra del dato numero 2209, e si disponga l'operazione come qui appresso, situando il numero proposto e la sua radice come il dividendo ed il divisore di una divisione, ed eseguendo le moltiplicazioni e le sottrazioni che verranno indicate.

(*) È noto che in una moltiplicazione se ciascuno de' fattori termina con uno zero il prodotto termina con due zeri, e se un solo de' fattori termina con zero il prodotto anche termina con zero.

$$\begin{array}{r|l}
 22 \cdot 09 & 47 \text{ radice} \\
 \underline{16} & \\
 60 \cdot 9 & 8; 87 \\
 \underline{60 \cdot 9} & \\
 00 \cdot 0 &
 \end{array}$$

Per ciò che si è detto la radice di 2209 deve esser composta di due cifre, cioè decine ed unità, ed il quadrato delle decine, non poteudo contenere che centinaja, deve trovarsi fra le 22 centinaja separate a sinistra. Ma il numero 22 delle centinaja oltre al quadrato delle decine conterrà ancora le centinaja provenienti dal doppio del prodotto delle decine per le unità, per cui spesso, come nel nostro caso, il numero delle centinaja non è un quadrato perfetto, e per trovare la cifra delle decine della radice si dovrà cercare il maggior quadrato contenuto in 22. E poichè quest'ultimo numero è compreso fra 16 e 25, il maggior quadrato in esso contenuto sarà 16, di cui la radice 4 sarà la cifra delle decine che si cercava. Registrata questa prima cifra nel luogo assegnato alla radice del numero proposto, si toglierà il suo quadrato 16 da 22, ed abbassate a fianco del resto 6 le ultime due cifre 09, il numero 609 che ne risulta dovrà comprendere il doppio del prodotto delle decine per le unità ed il quadrato delle unità; ma il doppio prodotto, non potendo contenere che decine, dovrà trovarsi nelle 60 decine separate a sinistra con un puntino, le quali comprenderanno anche le decine provenienti dal quadrato delle unità. Per trovare la cifra delle unità si dividerà il numero 60 pel doppio delle decine della radice già trovate, cioè per 8, ed il quoziente 7 esprimerà le unità della radice, poichè dalla composizione del quadrato esposta di sopra si vede che il doppio prodotto 56 diviso per uno de' suoi fattori 80 deve dare l'altro fattore 7, ed allo stesso modo le 56 decine, contenute fra le 60 del numero 609, divise per le 8 decine esprimenti il doppio della prima cifra della radice devono dare la seconda cifra 7; il resto 4 della divisione di 56 per 8 esprimerà le decine provenienti dal quadrato delle unità. Ottenuta così la cifra 7 delle unità, se ne prenderà il quadrato 49, il quale si aggiungerà al prodotto del doppio delle decine per le unità cioè al prodotto di 80 per 7, e la somma risultante dovrà eguagliare il numero 609 che comprende appunto quelle due ultime parti del quadrato di 47; ciò si verifica nel fatto, ed il resto zero dell'ultima sottrazione conferma l'esattezza di tutta l'operazione. Ma per formare simultaneamente le due ultime parti del quadrato, si potrà scrivere la seconda cifra 7 della radice a fianco del divisore 8, che esprime decine, e moltiplicare tutto il numero 87 per la stessa cifra 7; in fatti il prodotto di 7 per 80 + 7 è composto di due prodotti, 80 × 7, e 7 × 7, (§. 17) cioè del prodotto del doppio delle decine per le unità e del quadrato delle unità.

Sia, per un altro esempio, da estrarsi la radice quadrata dal numero 324. L'operazione procederà come segue;

$$\begin{array}{r|l}
 3 \cdot 24 & 18 \text{ radice} \\
 \underline{1} & \\
 22 \cdot 4 & 2 \cdot 8 \\
 \underline{22 \cdot 4} & \\
 00 \cdot 0 &
 \end{array}$$

dove è da notare soltanto che il doppio prodotto delle decine della radice per le unità vien accresciuto in modo dall'aggiunta delle decine provenienti dal quadrato delle unità, che il totale 22 diviso per 2, doppio della prima cifra della radice, darebbe 11 in vece di 8, quale si vede registrato. Ma le unità della radice non possono in nessun caso essere più di 9, e qui neppure una tal cifra deve ammettersi, poichè il doppio del prodotto di 10 per 9 insieme col quadrato di 9, che si formano moltiplicando 20 per 9, darebbero 261, numero maggiore di 224 da cui deve togliersi. La cifra 9 risulta dunque esorbitante, per cui si passa ad sperimentare la cifra 8 che si trova soddisfacente, perchè il prodotto di 28 per 8 è appunto 224. Questo esempio ci avverte che la divisione eseguita per ottenere la seconda cifra della radice la dà spesso eccedente, e per ridurla al giusto bisogna alcune volte istituire varii esperimenti, con diminuire gradatamente di un'unità il quoziente della divisione. A rendere più facili questi tentativi potrà servire la proprietà avvertita nel n.º 5.º che, quando due numeri differiscono di una unità, la loro somma uguaglia la differenza de' loro quadrati; così il quadrato di 19 è maggiore del quadrato di 18 per $19 + 18 = 37$, e quindi, nel precedente esempio, dopo aver formato con la cifra 9 il numero 261 che comprende il doppio prodotto ed il quadrato di 9, per formare con la cifra 8 il numero analogo basterà togliere da 261 la somma delle radici, 37.

L'estrazione della radice quadrata da un numero di molte cifre si riduce a ripetere più volte le operazioni qui sopra descritte. Propongasi il numero 223729; la sua radice 473, che per maggior chiarezza supporremo conosciuta, contiene tre cifre, ma potrà anche considerarsi composta di decine ed unità, e quindi facendo $a = 47$ decine, $b = 3$ unità, il numero 223729 sarà composto come segue;

$$\begin{aligned} a^2 &= 47^2 = 220900 = \begin{cases} 160000 \\ 60900 \end{cases} \\ 2a \times b &= 940 \times 3 = 2820 \\ b^2 &= 3^2 = 9 \\ (a+b)^2 &= 473^2 = 223729 \end{aligned}$$

Ciò posto l'estrazione della radice quadrata si eseguirà come qui appresso;

$$\begin{array}{r|l} 223729 & 473 \\ 16 & \\ \hline 637 & 87 \\ 609 & \\ \hline 2829 & 943 \\ 2829 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

si separeranno due cifre a destra del numero proposto, le quali non possono appartenere al quadrato delle decine, e questo quadrato dovrà esser contenuto nelle rimanenti quattro cifre 2237; ma la radice di un numero di quattro cifre dovendo averne due, per estrarre la radice da 2237 si procederà nel modo usato di sopra separando cioè due cifre alla sua destra e cercando il maggior quadrato contenuto nelle rimanenti cifre 22, che è 16, etc. Dopo aver così trovate le due cifre 47, ovvero le decine della radice, si abbasserà a fianco del resto 28 della seconda sottrazione l'ultima coppia 29, ed il numero 2829 dovrà comprendere il doppio del prodotto

delle decine per le unità ed il quadrato delle unità della radice. Quindi per trovare questo unità si separerà al solito la cifra 9, che non può appartenere al doppio prodotto, e si dividerà il numero 282 per 94 doppio delle decine; il quoziente 3 esprimerà l'ultima cifra della radice, e per formare simultaneamente il prodotto del doppio delle decine per le unità ed il quadrato delle unità si moltiplicherà 943 per 3, come si è praticato per la cifra precedente.

Se il numero proposto fosse 22371824, si supporrebbe sempre la sua radice composta di decine ed unità; e separando le prime due cifre a destra, 24, si troverebbe il numero delle decine, composto di tre cifre, estraendo la radice quadrata da 223718 nel modo tenuto qui sopra, ed in fine si troverebbero le unità della radice.

Così l'estrazione della radice da un numero di molte cifre sarà ridotta progressivamente a quella di un numero più semplice; e si potrà sin da principio dividere il numero proposto in coppie cominciando dalla destra, estrarre la radice quadrata dalla prima coppia o dalla prima cifra a sinistra, abbassare a fianco del resto la seconda coppia, e continuare l'operazione, formando i divisori con raddoppiare sempre la parte della radice già trovata, ed eseguendo le divisioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni successive di sopra indicate. Accade qualche volta che, dopo aver abbassata una coppia, non può effettuarsi la solita divisione, per essere il dividendo troppo piccolo; si scrive allora uno zero fra le cifre della radice, si abbassa un'altra coppia e si esegue la divisione pel doppio delle cifre della radice compreso lo zero.

Se dopo aver abbassata l'ultima coppia ed eseguita l'ultima sottrazione si ottiene un resto, ciò dimostra che il numero proposto non è un *quadrato perfetto*, e la radice trovata è quella del maggior quadrato compreso nel dato numero; essa considerata come radice di quest'ultimo, non è esatta, ma può rendersi più approssimata estendendola a piacere con più cifre decimali nel modo che verrà esposto qui appresso.

Poichè il quadrato di una frazione si forma moltiplicando fra loro due frazioni identiche alla proposta, ed il prodotto di due frazioni è eguale al prodotto de' numeratori diviso pel prodotto de' denominatori, è chiaro che il *quadrato di una frazione è eguale al quadrato del suo numeratore diviso pel*

quadrato del denominatore; Così il quadrato di $\frac{3}{4}$ è, $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$.

Per estrarre dunque la radice quadrata da una data frazione bisognerà estrarla dal numeratore e dal denominatore. Ma questa doppia operazione, quando il denominatore della frazione non è un quadrato perfetto, esige molto calcolo e molte precauzioni per giungere ad un risultato alquanto esatto, e però si preferisce di *moltiplicare il numeratore della frazione pel denominatore, estrarre la radice dal prodotto ottenuto, e dividerla pel denominatore*; è facile dar ragione di questa pratica. Dovendo estrarre la radice quadrata dalla frazione $\frac{546}{26}$, si moltiplicheranno i suoi

termini per 26, e si avrà la frazione equivalente $\frac{546}{26 \times 26}$ di cui il deno-

minatore è un quadrato; e per estrarre la radice da ambedue i termini della nuova frazione, l'operazione si ridurrà ad estrarla dal solo prodotto 546, giacchè la radice del denominatore è evidentemente 26. Molte volte non è necessario moltiplicare il numeratore della frazione pel denominatore a fine di ridurre quest'ultimo ad un quadrato, potendo ottenersi lo stesso intento con moltiplicare i termini della frazione per un numero più piccolo;

così per estrarre la radice da $\frac{46}{8}$ basterà moltiplicarne i termini per 2, poichè il denominatore della nuova frazione $\frac{46}{4}$ è evidentemente il quadrato di 2, e la radice della proposta frazione si otterrà dividendo la radice di 46 per 2.

Applichiamo questo principio alle frazioni decimali, e riflettiamo primieramente che, siccome moltiplicando per se stessa l'unità seguita da zeri si raddoppia il numero degli zeri nel prodotto, così è chiaro che l'unità seguita da un numero pari di zeri è sempre un quadrato perfetto; i numeri 100, 10000, 1000000 etc. ne offrono l'esempio. Quindi per estrarre la radice quadrata da una data frazione decimale, 0,524, si dovrà prima di tutto render pari il numero delle sue cifre con l'aggiunta di uno zero, se è necessario; perchè in tal modo il denominatore della frazione modificata 0,5240, dovendo contenere tanti zeri quante cifre decimali ha questa frazione (§. 34), sarà ridotto ad un quadrato, e si potrà estrarre la radice, operando sul decimale 0,5240 come su di un intero. Infatti la radice quadrata di 0,5240, ovvero di $\frac{5240}{10000}$, si ottiene estraendo la radice da 5240 e dividendola per 100, radice del denominatore 10000; e poichè la radice del numero 5240 è composta di due cifre, la divisione di essa per 100 sarà eseguita considerando quelle cifre come decimali, cioè scrivendo le due cifre 72 della radice di 5240 immediatamente dopo la virgola. Dunque se la proposta frazione esprime decimillesimi, la sua radice dovrà esprimere centesimi, e similmente se la frazione data esprimesse centesimi la radice esprimerebbe decimi. In generale, *il numero delle cifre decimali della radice deve esser metà del numero delle cifre decimali del quadrato*, perchè l'estrazione della radice quadrata riduce a metà il numero degli zeri da cui è seguita l'unità nel denominatore della data frazione decimale. Onde per estrarre la radice quadrata da un decimale qualunque, senza aver riguardo al suo denominatore, si renderà pari il numero delle cifre decimali, le quali si divideranno in coppie, e si estrarrà la radice come da un intero, non omettendo di notare fra le cifre della radice uno zero per ogni coppia di zeri che si trovasse a sinistra delle cifre significative del proposto decimale. Così la radice quadrata di 0,0025 sarà 0,05, la radice di 0,002109 sarà 0,047, quella di 0,0144 sarà 0,12 etc.

Tutto ciò si applica immediatamente alla estrazione della radice quadrata per approssimazione da un numero intero che non sia un quadrato perfetto. Per esempio volendo la radice quadrata di 2 con tre cifre decimali, si aggiungeranno sei zeri a destra del numero proposto, e con ciò esso sarà cambiato in un decimale avente per denominatore un quadrato; ed estraendo la radice, da 2,00'00'00 considerato come un numero intero, a norma della regola precedente, si otterrà 1,414. Allo stesso modo se si dovrà estrarre la radice quadrata da un numero intero accompagnato da cifre decimali, per esempio 234,323, e si voglia estesa sino ai decimillesimi, siccome il numero delle cifre decimali del quadrato deve esser doppio di quello della radice, si aggiungeranno a destra del proposto numero cinque zeri, ed estrarra la radice da 234,3230'00'00, come da un numero intero, esserà risulterà 15,3076.

Per provare l'esattezza di una estrazione di radice quadrata, si eleva a quadrato la radice trovata, vi si aggiunge il resto ottenuto in fine dell'operazione, e la somma deve uguagliare il numero proposto.

Dell' estrazione della radice cubica dai numeri.

Come l'estrazione della radice quadrata dipende dalla composizione del quadrato della somma di due numeri, così l'estrazione della radice cubica dipende dalla composizione del cubo della somma medesima.

Abbiamo veduto che il quadrato di $a+b$ è così espresso, $a^2 + 2a \times b + b^2$; e poichè il cubo di un numero si ottiene moltiplicando esso numero pel suo quadrato, il cubo di $a+b$ si avrà moltiplicando $a+b$ per $a^2 + 2a \times b + b^2$. Per eseguire questo prodotto bisogna ricordarsi che per moltiplicare la somma di più numeri per la somma di altri numeri, deve moltiplicarsi ciascun numero della prima somma per ciascun numero della seconda, e sommare tutti i prodotti ottenuti (§. 17); per conseguenza si moltiplicheranno i numeri a^2 , $2a \times b$, b^2 prima per a e poi per b e si sommeranno i prodotti che ne emergono, come segue,

$$\begin{array}{r} a^2 \times a + 2a \times b \times a + b^2 \times a \\ + a^2 \times b \quad + 2a \times b \times b + b^2 \times b \end{array}$$

E riflettendo che $a^2 \times a = a^3$, $b \times b = b^2$, $b^2 \times b = b^3$, e che i prodotti $2a \times b \times a$, e $b^2 \times a$ possono anche scriversi così, $2a^2 \times b$, ed $a \times b^2$ (§. 24), il prodotto totale prenderà la forma,

$$a^3 + 2a^2 \times b + a^2 \times b + a \times b^2 + 2a \times b^2 + b^3;$$

ma i due prodotti $2a^2 \times b$, $a^2 \times b$, potendo comprendersi in una sola espressione $3a^2 \times b$, e similmente potendo scriversi $3a \times b^2$ in vece di $a \times b^2 + 2a \times b^2$, il cubo di $a+b$ nel suo aspetto più semplice sarà così espresso,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 \times b + 3a \times b^2 + b^3$$

Ora, supponendo che i numeri a , b rappresentino rispettivamente le decine e le unità nelle quali può scomporsi un numero qualunque e traducendo in linguaggio ordinario l'eguaglianza precedente ne segue che, *il cubo di un numero composto di decine ed unità contiene quattro parti, cioè il cubo delle decine, il triplo del quadrato delle decine moltiplicato per le unità, il triplo delle decine moltiplicato pel quadrato delle unità, ed il cubo delle unità.*

Applichiamo questa regola alla formazione del cubo di 47, e sarà, $a=40$, $b=7$; e quindi

$$\begin{array}{r} a^3 = 40^3 \dots\dots\dots = 64 \cdot 000 \\ 3a^2 \times b = 3 \times 16 \cdot 00 \times 7 = 48 \cdot 00 \times 7 = 336 \cdot 00 \\ 3a \times b^2 = 3 \times 40 \times 49 \dots\dots\dots = 5880 \\ b^3 = 7^3 \dots\dots\dots = 343 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 398 \cdot 23$$

$$\text{Totale.} \dots = 47^3 \dots\dots\dots = 103 \cdot 823$$

Da questo quadro si scorge, 1.° che il cubo delle decine non ha cifre significative inferiori alle migliaia, nè potrebbe mai averne, poichè moltiplicando due volte per se stesso un numero che termina con zero il prodotto finale deve contenere tre zeri; 2.° che il triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità è il maggiore de' quattro termini, dopo il cubo

delle decine, e non contiene cifre significative inferiori alle centinaia, perchè il quadrato 1600 delle decine, che è fattore in quel termine, deve necessariamente finire con due zeri. Queste osservazioni ci saranno di guida nella estrazione della radice cubica.

Si separino tre cifre a destra del numero proposto 103823, e si disponga l'operazione come qui appresso;

$$\begin{array}{r|l}
 103 \cdot 823 & 47 \\
 \hline
 64 & \\
 \hline
 39 \cdot 823 & 48 \quad 48 \\
 39 \cdot 823 & 84 \\
 \hline
 00 \cdot 000 & 49 \\
 & \hline
 & 5689 \\
 & 7 \\
 & \hline
 & 39823
 \end{array}$$

Il cubo delle decine non potendo contenere cifre significative di un ordine inferiore alle migliaia, dovrà esser compreso nelle tre cifre che rimangono a sinistra; e siccome il maggior cubo contenuto in 103 è 64 (§. 46) che ha per radice 4, sarà questa la cifra delle decine della radice del numero proposto. Si sottragga 64 da 103, ed il resto 39 rappresenterà le migliaia provenienti principalmente dal triplo del quadrato delle decine moltiplicato per le unità, il quale non potendo contenere che centinaia, dovrà esser compreso nelle prime tre cifre 398 del numero 39823 che si ottiene abbassando l'ultimo ternario. E riflettendo che nella composizione del cubo la maggior parte del numero 398 rappresenta il prodotto di 48, per 7, è chiaro che per ottenere questa seconda cifra della radice si dovrà dividere il numero 398 poco maggiore di quel prodotto per uno de' suoi fattori 48, indicante il triplo del quadrato delle decine della radice. Si formerà dunque questo triplo quadrato e si esaminerà quante volte è contenuto in 398; si otterrà così il numero 8, ma prima di adottarlo per seconda cifra della radice, si proverà se gli ultimi tre termini del cubo, composti co' numeri 40 ed 8, ed insieme riuniti, fanno una somma eguale o minore del resto 39823 che deve comprenderli tutti. Ora, la somma del triplo quadrato 4800 moltiplicato per 8, del triplo delle decine 120 moltiplicato per 64 (quadrato di 8), e di 512 (cubo di 8) ascende a 46592, che essendo maggiore del resto 39823, mostra essere la cifra 8 eccedente. Si passerà quindi a sperimentare la cifra 7, e per abbreviare l'operazione, al triplo quadrato 4800 si aggiungerà il triplo del prodotto di 40 per 7, cioè 840, ed il quadrato di 7, che è 49; la somma ottenuta 5689 si moltiplicherà per 7, ed il prodotto rappresenterà i tre ultimi termini del cubo, perocchè il prodotto del numero 7 per la somma $3 \times 40^2 + 3 \times 40 \times 7 + 7 \times 7$ è composto de' tre prodotti (§. 17) $3 \times 40^2 \times 7$, $3 \times 40 \times 7 \times 7$, $7 \times 7 \times 7$, cioè del triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità, del triplo delle decine moltiplicato pel quadrato delle unità e del cubo delle unità. I tre numeri 4800, 840, 49 da aggiungersi fra loro potranno anche scriversi omettendo gli zeri de' primi due con situarli uno sotto l'altro sempre con una cifra in fuori verso la destra, siccome si vede nell'esempio. Eseguito in tal modo il calcolo con la cifra 7, si ottiene 39823 per somma de' tre termini riuniti, per cui se ne conchiude che la radice del numero proposto 103823 è 47.

Per trovare la radice cubica di un numero che contenga più di sei cifre -

come 105823817, essa si supponrà anche composta di decine e di unità, e separando un primo ternario a destra, il cubo delle decine dovrà esser compreso nel numero 105823, ma questo, contenendo più di tre cifre, la sua radice dovrà averne almeno due, poichè il cubo del più piccolo numero di due cifre, qual è il 10, ne contiene quattro. Quindi per estrarre la radice cubica da 105823 si procederà come si è fatto qui sopra per ottenere una radice di due cifre, trovata la quale, si cercherà la terza cifra nello stesso modo usato per trovare la seconda. Trascriviamo qui appresso tutta l'operazione;

105823817	473		
64	48	48	48
41823	48	84	168
39823	49	49	147
2000817	6627	5689	6627
2000817	7	7	423
0000000	39823	39823	9
			666939
			3
			2000817

dove faremo osservare che il triplo quadrato di 47, che serve per trovare la terza cifra della radice, si è ricavato dai numeri 48, 84, 49 già considerati, aggiungendo il primo come sta al doppio del secondo ed al triplo del terzo, senza alterare la posizione delle loro ultime cifre a destra. Questa importante abbreviazione è giustificata riflettendo che il quadrato di 47, o di $40+7$, ed in generale il quadrato di una somma $a+b$ è rappresentato dalla espressione $a^2 + 2 \times ab + b^2$, ed il suo triplo da $3 \times a^2 + 6 \times ab + 3 \times b^2$, cioè dal numero $3 \times a^2$, che corrisponde a 48, più il doppio di $3 \times ab$, ovvero il doppio di 84, più il triplo di b^2 , ovvero il triplo di 49.

Se il numero proposto contenesse più di nove cifre la sua radice ne conterrebbe più di tre, ma sarebbe egualmente facile di ridurre l'operazione ad un caso più semplice: ed in generale per estrarre la radice cubica da un numero qualunque si divideranno le sue cifre a tre a tre cominciando dalla destra, e si estrarrà la radice dall'ultimo gruppo che rimane a sinistra; indi a fianco de' successivi resti si abbasseranno uno dopo l'altro i seguenti ternarii, si farà il triplo quadrato della parte della radice già trovata, e si troveranno con la divisione le rimanenti cifre della radice, ciascuna delle quali non dovrà adottarsi senza averne fatto innanzi l'esperienza colla formazione degli ultimi tre termini del cubo nel modo indicato.

Con un procedimento non dissimile da quello tenuto per la radice quadrata se dovesse estrarsi la radice cubica da una frazione qualunque, bisognerebbe prima ridurre a cubo perfetto il suo denominatore ed indi estrarre la radice da ambi i termini. Così la radice cubica di $\frac{2}{3}$ si otterrà cambiando questa frazione in $\frac{8}{27}$, di cui la radice sarà quella del numero 18 divisa per 3. E similmente la radice di $\frac{9}{27}$ si avrà riducendo questa frazione a $\frac{27}{27}$, estraendo la radice cubica da 27, e dividendola per 3.

Per estendere poi la radice cubica di un dato numero sino ad una cifra decimale convenuta, bisognerà dare al cubo tre cifre decimali per ogni

cifra decimale della radice. Per esempio la radice cubica di 1024 con tre cifre decimali si otterrà aggiungendo al numero proposto nove zeri, ed estraendo la radice cubica da 1'024,000'000'000 come da un numero intero; e la radice di 31,2534 con due cifre decimali si avrà estraendo la radice cubica da 31,253'400.

Analogamente a quanto si è detto nel §. 45, n.º II, se da un dato numero limitato e soggetto all'ordinario errore nell'ultima cifra a destra dovrà estrarsi la radice quadrata o cubica, e si voglia conoscere l'errore che ricade su quella radice, dovranno applicarsi le regole seguenti. *Aspetto alla radice quadrata, l'errore della medesima si conoscerà dividendo l'unità dell'ordine dell'ultima cifra a destra del numero dato pel quadruplo di essa radice; e l'errore sulla radice cubica sarà espresso da quella medesima unità divisa pel sestuplo del quadrato della radice* (*). Così, essendo dato il decimale 24,331, che si suppone contenere al più l'errore di un mezzo millesimo, l'errore sulla sua radice quadrata sarà

$$\frac{0,001}{4 \times \sqrt{24}} = \frac{0,001}{4 \times 5} = 0,0005 \text{ circa, e l'errore sulla sua radice}$$

$$\text{cubica sarà } \frac{0,001}{6 \times \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{24}} = \frac{0,001}{6 \times 2,9 \times 2,9} = \frac{0,001}{50} = 0,00002 \text{ circa;}$$

cioè ciascuna di quelle radici sarà esatta fra un diecimillesimo.

Finalmente potrebbe domandarsi la radice quadrata o cubica di una frazione o di un numero intero approssimata sino ad una unità frazionaria di dato denominatore, come se si volesse la radice quadrata o cubica di 2, o di $\frac{2}{3}$ approssimata sino ad un sessantesimo. In tal caso è chiaro che bisognerà trasformare il numero o la frazione proposta in una frazione avente per denominatore il quadrato o il cubo del denominatore assegnato, ed estrarre la radice dal numeratore di tal frazione. La radice quadrata di 2 approssimata sino ad un sessantesimo sarà quella di $\frac{2 \times 60^2}{60^2} = \frac{7200}{60^2}$, e si otterrà

(*) Indicando con M il numero proposto esente dall'errore dell'ultima sua cifra a destra, e con x l'unità dell'ordine di quella medesima cifra, il numero approssimato sarà espresso da $M \pm \frac{x}{n}$, e l'errore sulla radice quadrata di M sarà evidentemente $\sqrt{M} - \sqrt{M \pm \frac{x}{n}}$

$$= \sqrt{M} - \sqrt{M \left(1 \pm \frac{x}{nM} \right)} = \sqrt{M} \left\{ 1 - \left(1 \pm \frac{x}{nM} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= \sqrt{M} \left\{ 1 - 1 \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{nM} \text{ etc. } \right\} = \mp \sqrt{M} \cdot \frac{x}{4nM} = \mp \frac{x}{4n\sqrt{M}} \text{ L'errore sulla}$$

radice cubica di M sarà similmente $\sqrt[3]{M} - \sqrt[3]{M \pm \frac{x}{n}}$

$$= \sqrt[3]{M} \left\{ 1 - \left(1 \pm \frac{x}{nM} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} = \sqrt[3]{M} \left\{ 1 - 1 \mp \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{nM} \text{ etc. } \right\} = \mp \frac{x \sqrt[3]{M}}{6nM}$$

$$= \mp \frac{x \sqrt[3]{M}}{6 \sqrt[3]{M} \sqrt[3]{M} \sqrt[3]{M}} = \mp \frac{x}{6(\sqrt[3]{M})^3}$$

estraendo la radice quadrata da 7200, ed assegnandole per denominatore 60: per dare alla radice cubica di $\frac{3}{2}$ la stessa approssimazione si cambierà questa frazione in $\frac{3 \times 12 \times 60^2}{5 \times 12 \times 60^2} = \frac{129600}{60^3}$, ed estratta la radice cubica da 129600 le si darà per denominatore 60. Da ultimo volendo la radice quadrata di $\frac{3}{2}$ esatta sino ad un trentaduesimo si trasformerà questa frazione in $\frac{3 \times 32^2}{32^2} = \frac{682 \frac{2}{3}}{32^2}$, e si troverà la radice di 683 (o più esattamente di 682,6666...) cui si darà per denominatore 32. Questi esempi potranno servire di norma ne' casi simili.

DE' NUMERI CONCRETI E COMPLESSI.

§. 49.

Considerazioni generali.

Finora abbiamo considerato ne' calcoli i numeri *astratti*, cioè quelli ne' quali la natura o la specie dell'unità non è definita; ma è chiaro che le regole esposte rimarrebbero infruttuose se non se ne facesse l'applicazione ai numeri che occorrono effettivamente nelle convenzioni sociali, cioè ai numeri *concreti* (§. 4). Il calcolo di questi numeri, quando l'unità non può dividersi in parti, o quando la divisione si fa decimalmente, non differisce dal calcolo de' numeri astratti; così se volesse sapersi il costo di 51 buoi, essendosi convenuto per ogni buo il prezzo di 75 ducati e 24 grana, l'operazione si ridurrebbe a moltiplicare 75,24 per 51. Se però in vece del ducato napolitano, che ha il pregio della suddivisione decimale, dovesse adoperarsi la lira toscana che si divide in 20 soldi, e ciascun soldo in 12 denari, e si trattasse di valutare il costo di un lavoro la cui quantità in lunghezza fosse espressa per canne e paia di canna (essendo l'antica canna napolitana divisa in 8 palmi, il palmo in 12 once e l'oncia in 5 minuti); l'operazione di moltiplicare, per esempio, 15 lire 6 soldi e 3 denari per 4 canne 5 palmi e 7 once non potrebbe eseguirsi con le regole date pei numeri astratti.

Diconsi numeri *complessi* questi numeri concreti ne' quali le unità principali sono divise in un numero di parti stabilito dall'uso, e ciascuna parte è suddivisa anche in un numero convenuto di altre parti più piccole, e così di seguito. Il calcolo de' numeri complessi esige dunque avvertenze e regole speciali, ma le seguenti osservazioni sono comuni a tutti i numeri concreti.

1.º *L'addizione e la sottrazione de' numeri concreti non può eseguirsi se non quando essi sono dello stesso genere*; è chiaro che un numero di uomini ed un numero di ducati non po-

trebbero riunirsi per formarne un solo, nè da un numero di botti di vino potrebbe togliersi un numero di botti di olio (§. 22) etc.

2.^o Siccome il prodotto di una moltiplicazione si forma per mezzo del moltiplicando, (§. 8, 27) così *nella moltiplicazione de' numeri concreti il prodotto sarà sempre dello stesso genere del moltiplicando, ed il moltiplicatore figurerà da numero astratto.* Per esempio, volendo conoscere il costo di 25 tomoli di grano al prezzo di ducati 2 e grana 24 per ogni tomolo, si moltiplicherà 2,24 per 25, ed il prodotto 56 esprimerà *ducati* come il moltiplicando 2,24; e quantunque il moltiplicatore 25 sia un numero concreto, pure esso qui serve ad indicare soltanto che il numero 2,24 deve esser ripetuto 25 volte.

La moltiplicazione di due o più numeri concreti della stessa specie non può eseguirsi perchè il prodotto non avrebbe nessun significato. Così la moltiplicazione di 34 rotoli di caffè per 15 rotoli dello stesso caffè non potrebbe aver alcun oggetto; ma se dovessero cambiarsi fra negozianti due specie diverse di caffè e fosse convenuto che ogni rotolo della prima sorta valesse rotoli $2\frac{1}{2}$ della seconda, la moltiplicazione di rotoli $2\frac{1}{2}$ di caffè della seconda sorta per 34 della prima servirebbe a far conoscere quanto caffè della seconda sorta dovrebbe darsi in cambio di 34 rotoli della prima, ed in questa operazione 34 figurerebbe da numero astratto. La moltiplicazione di due numeri concreti della stessa specie è possibile quando essi indicano la lunghezza e la larghezza di un oggetto qualunque esteso per due direzioni, come un campo, una strada, una tavola etc., ma una tale operazione esige, come si vedrà, particolari avvertenze.

3.^o Siccome nella divisione il dividendo rappresenta un prodotto di cui sono fattori il divisore ed il quoziente, trattandosi di numeri concreti può accadere, secondo i diversi casi, che il quoziente sia dello stesso genere del dividendo ed allora il divisore, il quale sarà necessariamente di specie diversa, figurerà da numero astratto; e viceversa il divisore può essere dello stesso genere del dividendo ed allora il quoziente sarà di genere diverso e figurerà da numero astratto. Tutto ciò risulta immediatamente da quanto si è detto qui sopra per la moltiplicazione. Per esempio se con 56 ducati si sono comprati 25 tomoli di grano, e si voglia conoscere il costo di un sol tomolo, bisognerà dividere 56 ducati per 25 tomoli ed il quoziente esprimerà *ducati* come il dividendo; il divisore in questo caso figurerà da numero astratto perchè l'operazione si riduce a decomporre 56 ducati in tante parti eguali quante unità si contengono nel numero 25 (pag. 19): ma se con 56 ducati si voglia comprare del grano a ducati 2,24 il tomolo, per sapere quanti tomoli se ne potranno acquistare bisognerà dividere 56 ducati per 2,24 ducati; in questo caso il divisore sarà dello stesso genere del dividendo ed il quoziente figurerà da numero astratto, perchè esprime quanto volte 2,24 ducati sono contenuti in 56 du-

cati, coerentemente alle distinzioni fatte a pag. 19 intorno alla divisione de' numeri astratti.

In generale, il quoziente di un numero concreto per un altro dello stesso genere dovrà considerarsi come un numero ASTRATTO. Questa verità è di un alto interesse perchè se ne fa uso assai frequentemente in tutte le scienze matematiche.

§. 30.

Dell'addizione e della sottrazione de' numeri complessi.

Nei numeri complessi si considera, come abbiamo già detto, l'unità principale divisa e suddivisa in parti sempre più piccole, il numero delle quali vien determinato dall'uso. Così la *tesa*, misura francese di lunghezza, si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, e la linea in 12 *punti*. Dunque un numero complesso qualunque, per esempio 14 *tese* 5 *piedi* 10 *pollici* 8 *linee*, contiene diverse classi di unità di grado in grado più piccole derivate le une dalle altre secondo una suddivisione convenuta; l'unità principale si chiama la *prima specie*, e l'ultima o la più piccola dicesi l'*ultima specie*. Nell'esempio addotto la prima specie è la *tesa*, e l'ultima specie è la *linea*.

Ciò premesso, l'addizione de' numeri complessi poco differisce da quella de' numeri interi: si scrivono i numeri proposti uno sotto l'altro, situando nella medesima colonna le unità della stessa classe; si comincia l'addizione dalle unità dell'ultima specie, e quando la loro somma sorpassa il numero di cui si compone l'unità della specie precedente, si riportano una o più di queste unità alla colonna cui appartengono; si fa l'addizione de' numeri contenuti nella nuova colonna, e dalla somma ottenuta si estraggono, se ve ne sono, le unità appartenenti alla terza colonna, e così andando avanti. Seguono gli esempi.

canne	palmi	once	minuti	tese	piedi	pollici	linee
4	6	8	4	14	5	10	8
16	2	3	1	3	4	11	2
	4	11	3	1	5	0	10
1	0	0	2		4	8	7
22	6	0	0	21	2	7	3

La somma de' minuti essendo 10, corrisponde esattamente a 2 once, e perciò si è scritto zero nel luogo de' minuti e si son riportate le due once nella colonna cui appartenevano; similmente la somma 24 di questa colonna equivalendo a 2 palmi, si son essi riportati nella propria colonna, ed è restato vuoto anche il luogo delle once. Finalmente della somma 14 de' palmi si è estratta

una canna che si è aggiunta alle altre canne, e si è scritto il resto 6 nella colonna de' palmi. L'addizione delle tese è stata regolata allo stesso modo.

La sottrazione de' numeri complessi si fa disponendo i numeri proposti come nell'addizione, e cominciando l'operazione dall'ultima specie; quando in qualche classe il numero da sottrarsi è maggiore di quello da cui deve togliersi, si aggiunge a quest'ultimo un'unità improntata dalla classe precedente, dopo averla ridotta in unità della specie inferiore sulla quale si esegue la sottrazione. Ecco alcuni esempi.

giorni	ore	minuti	secondi	canne	palmi	once	minuti
2	22	45	10,3	3	5	0	4
1	0	50	2,4	1	7	3	2
1	21	55	7,9	1	5	9	2

Nella prima sottrazione si è considerato il giorno con le sue suddivisioni; ognun sa che il *giorno* si divide in 24 *ore*, l'ora in 60 *minuti*, ed il minuto in 60 *secondi*; il secondo si divide anche in 60 *terzi*, ma le parti del secondo sogliono più generalmente assegnarsi per mezzo di frazioni decimali, come nell'esempio. Cominciando l'operazione dall'ultima specie, cioè dai secondi, si è sottratto il decimale 2,4 dall'altro 10,3; indi dovendo togliere 50 minuti da 45, si è improntata un'ora dalla colonna precedente, che ridotta in minuti ed aggiunta a 45 ha dato 105, da cui si è sottratto 50, e si è avuto per resto 55. La sottrazione di canne non presenta maggiori difficoltà.

§. 51.

Riduzione di un numero complesso a numero incomplesso e viceversa.

L'addizione e la sottrazione si eseguono, come abbiamo veduto, su i numeri complessi senza cangiarne la forma; ma non accade lo stesso della divisione, ed in talune circostanze anche della moltiplicazione, le quali operazioni esigono che i numeri complessi prendano l'aspetto di numeri *incomplessi*, cioè di numeri che contengono una sola specie di unità, a simiglianza de' numeri astratti. E però è necessario mostrare come un numero complesso si possa mutare in numero incomplesso e viceversa.

1.º Un numero complesso qualunque, come per esempio; $3 \text{ piedi } 4 \text{ pollici } 8 \text{ linee}$, sarà ridotto a numero incomplesso quando la frazione dell'unità principale, $3 \text{ piedi } 4 \text{ pollici } 8 \text{ linee}$, espressa con diverse unità relative alle *specie* secondarie, sarà ridotta a frazione ordinaria o a frazione decimale. Per ridurla a frazione ordinaria basterà tro-

vare quante linee, o unità dell'ultima specie, contiene la tesa e quante ne contiene il numero $3^{\text{piedi}} 4^{\text{pollici}} 8^{\text{linee}}$; perocchè, supponendo che la tesa contenga $86\frac{1}{4}$ linee, e che quel numero ne contenga 488, è chiaro che una linea sarà $\frac{1}{86\frac{1}{4}}$ di tesa, e che $3^{\text{piedi}} 4^{\text{pollici}} 8^{\text{linee}}$, pari a 488 linee, equivarrà a $\frac{488}{86\frac{1}{4}}$ di tesa. Ora, ricordandosi la divisione della tesa in piedi, pollici e linee si ha,

$$\begin{aligned} 1 \text{ tesa} &= 6 \text{ piedi} = 6 \times 12 \text{ pollici} = 6 \times 12 \times 12 \text{ linee, ossia} \\ 1 \text{ tesa} &= 6 \text{ piedi} = 72 \text{ pollici} = 86\frac{1}{4} \text{ linee} \\ 1 \text{ piede} &= 12 \text{ pollici} = 144 \text{ linee} \\ 1 \text{ pollice} &= 12 \text{ linee.} \end{aligned}$$

D'altra parte, per ridurre in linee $3^{\text{piedi}} 4^{\text{pollici}} 8^{\text{linee}}$ si dirà; 3 piedi equivalgono a $3 \times 12 = 36$ pollici, che uniti a 4 pollici fanno 40 pollici, i quali pareggiano $40 \times 12 = 480$ linee, cui aggiunte 8 linee, si hanno in tutto 488 linee. Si darà alle operazioni indicate il seguente andamento;

1 tesa	3 piedi	8 linee
6	12	6
<u>6 piedi</u>	<u>36 pol. = 3 piedi</u>	<u>48</u>
12	4	3
<u>72 pollici</u>	<u>40 pol. = 3 piedi 4 pollici</u>	<u>51 pie. = 8'. 3p.</u>
12	12	12
<u>144</u>	<u>480 linee = 3 piedi 4 pollici</u>	<u>102</u>
72	8	51
<u>86$\frac{1}{4}$ linee</u>	<u>488 linee = 3 piedi 4 pollici 8 linee</u>	<u>4</u>
		616 pol. = 8'. 3p. 4pp.
		12
		1232
		616
		8
		<u>7400 lin. = 8'. 3p. 4pp. 8l.</u>

Il dato numero complesso $8^{\text{tese}} 3^{\text{piedi}} 4^{\text{pollici}} 8^{\text{linee}}$ si è ridotto così al numero incompleto $8\frac{488}{86\frac{1}{4}}$. Ma volendolo sotto forma di frazione, converrà meglio cominciare dal ridurre le tese in piedi, e poi in pollici, ed indi in linee, come si vede praticato nella terza colonna del quadro che precede, da cui risulta che il proposto numero complesso corrisponde alla frazione $\frac{7400}{86\frac{1}{4}}$.

La riduzione di un numero complesso ad incompleto eseguita nel modo ora indicato non conduce ordinariamente alla più semplice espressione di quel numero. Così il numero $8\frac{488}{86\frac{1}{4}}$ si esprime più semplicemente con $8\frac{488}{86\frac{1}{4}}$, e quest'ultimo risultamento si potrebbe ottenere direttamente con un andamento diverso. Comin-

ciando dall' *ultima specie*, si dirà: 8 linee sono $\frac{8}{12}$, ovvero $\frac{2}{3}$ di pollice, e perciò 4 pollici 8 linee equivalgono a $4\frac{2}{3}$ pollici = $\frac{14}{3}$ di pollice; ed essendo il pollice la dodicesima parte del piede si avrà $4\frac{2}{3}$ pollici 8 linee = $\frac{14}{3} : 12 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$ di piede; quindi 3 piedi 4 pollici 8 linee si ridurranno a $3\frac{7}{18}$ piedi = $\frac{55}{18}$ di piede; ma ogni piede è sesta parte della tesa, dunque $\frac{55}{18}$ di piede = $\frac{55}{18} : 6 = \frac{55}{108}$ di tesa, come sopra. Le operazioni qui indicate possono disporsi come segue;

$\begin{array}{r} 3 \text{ piedi} \\ 3 \frac{7}{18} \\ \hline 61 \\ 18 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \text{ pollici} \\ 4 \frac{2}{3} \\ \hline 24 \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \text{ linee} \\ 8 \\ 12 \end{array} \text{ di pollice}$
$\begin{array}{r} 61 \\ 108 \end{array} \text{ di tesa}$	$\begin{array}{r} 24 \\ 36 \end{array} \text{ di piede}$	$\frac{55}{108}$

Per un altro esempio, debbano ridursi 12 ore, 24 minuti e 35 secondi in frazione ordinaria di giorno; si avrà,

$\begin{array}{r} 12 \text{ ore} \\ 12 \frac{2}{144} \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 59 \\ 1787 \\ 144 \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \text{ minuti} \\ 24 \frac{1}{12} \\ \hline 48 \\ 24 \\ \hline 7 \\ 295 \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \text{ secondi} \\ 35 \\ 60 \\ \hline 175 \end{array} \text{ di minuto}$
$\frac{1787}{3456} \text{ di giorno}$	$\frac{295}{144} \text{ di ora}$	$\frac{175}{144}$

Per ridurre una frazione di numero complesso in frazione decimale dell'unità principale si userà il metodo precedente, con la sola differenza che in vece di ridurre i numeri di ciascuna specie in frazioni ordinarie della specie precedente, si ridurranno in frazioni decimali. Così, 8 linee, che sono $\frac{8}{12}$ di pollice, si ridurranno a 0,666... pol., cui aggiunti 4 pollici, si avranno 4,666... pol.; per ridurre questo numero a frazione decimale di piede si dividerà per 12, onde si cambierà in 0,3888... piedi; e finalmente, aggiunti 3 piedi a questa frazione, si otterrà 3,3888..., che sarà ridotto a frazione decimale di tesa dividendolo per 6. Il quoziente 0,5648148... indicherà la frazione decimale di tesa corrispondente a 3 piedi 4 pollici 8 linee.

Ecco l'andamento del calcolo

8,00	12	0,666...	12	0,38888...	6
80	0,666...	4,666	3,38888	38	0,56481...
"	106	106	38	28	
			48	08	

La riduzione di 12 ^{ore} 24 ^{minuti} 35 ^{secondi} in frazione decimale di giorno si eseguirà analogamente come qui appresso;

35,00	60	0,58333...	60	0,4097222...	24
50	24,58333	058	12,4097222	40	0,51707175...
20	43	13	169	172	
	13	14	42	182	
	13	14	14		

2.° Per convertire una frazione ordinaria o una frazione decimale dell'unità principale in frazione complessa, l'operazione dovrà incominciare dalla prima *specie* e progredire verso l'ultima. Si voglia ridurre in frazione complessa la frazione ordinaria $\frac{61}{108}$ di tesa; considerando questa frazione come una divisione indicata, di 61 tese per 108, si ridurranno le tese in piedi moltiplicandole per 6, a fin di poter eseguire l'operazione, ed il prodotto 366 diviso per 108 darà per quoziente 3 piedi, con un resto di 42 piedi da dividersi per 108. Per effettuare questa divisione si ridurranno i piedi in pollici moltiplicandoli per 12, ed il prodotto 504 diviso per 108 darà per quoziente 4 pollici con un resto di 72 pollici, che ridotti similmente in linee si cambieranno in 864 linee, le quali divise per 108 daranno per ultimo quoziente 8 linee.

Le sole moltiplicazioni successive ora indicate, senza le divisioni, basteranno per ridurre una frazione decimale in frazione complessa. Così, si moltiplicherà 0,56481... *tese* per 6, e si otterrà 3,38888..., che esprimerà 3 piedi con una frazione decimale di piede; si moltiplicherà questa frazione decimale per 12, e si avrà 4,6666...,

cioè 4 pollici ed una frazione di pollice; ed in fine si moltiplicherà 0,6666... per 12, e si avrà per prodotto 8 linee. Tutto ciò apparirà più manifesto ne' seguenti modelli di calcolo.

<i>Tese</i>		<i>Tese</i>	<i>Giorni</i>
61		0, 56481	0, 51707175
6		6	24
366	108	38886	206828700
42	3 piedi 4 pollici 8 linee	12	103414350
12		77772	12 40972200
84		38886	60
42		466632	24 383320
504		12	60
72		133264	34 999200
12		66632	
144		7 99584	
72			
864			
000			

§. 52.

Della moltiplicazione de' numeri complessi.

Premessa la conversione de' numeri complessi in numeri incompleksi e viceversa, la moltiplicazione de' numeri complessi potrà eseguirsi, *riducendo in frazioni ordinarie o decimali della prima specie le frazioni complesse contenute nel moltiplicando e nel moltiplicatore, eseguendo la moltiplicazione come si è praticato pei numeri astratti (§§. 30, 40), e convertendo in frazione complessa la frazione ordinaria o decimale annessa al prodotto ottenuto.* Per esempio debba calcolarsi il costo di 8 *tenne* 6 *palini* 3 *once* di una stoffa che si è comprata a 20 *lire* 14 *solidi* 8 *denari* la canna: la frazione 6 *palini* 3 *once* di canna equivale a $\frac{25}{8}$, e la frazione 14 *solidi* 8 *denari* di lira corrisponde ad $\frac{17}{8}$; quindi si moltiplicherà $20\frac{17}{8}$ per $8\frac{25}{8}$ e si otterrà il prodotto $182\frac{25}{4}$, il quale dovrà esprimersi lire, e riducendo in frazione complessa di lira la frazione ordinaria $\frac{25}{4}$, il costo domandato sarà 182 *lire*. 1. 3 $\frac{1}{4}$. Si otterrebbe lo stesso risultato riducendo le frazioni complesse de' due fattori in frazioni decimali, e rimettendo sotto forma di frazione complessa la frazione decimale annessa al prodotto. Ed in questa operazione si potrebbero, per brevità di calcolo, adoperare anche insieme le frazioni decimali e le frazioni ordinarie, come qui appresso.

Frazione di lira

$$\begin{array}{r}
 14^{\text{solidi}} \quad 8^{\text{denari}} \\
 14\frac{2}{3} \quad \overline{) 20} \\
 \quad \quad 0,7\frac{1}{3}
 \end{array}$$

Frazione di canna

$$\begin{array}{r}
 6^{\text{palmi}} \quad 3^{\text{oncie}} \\
 6,25 \quad \overline{) 8} \\
 \quad \quad 0,78\frac{1}{2}
 \end{array}$$

Moltiplicazione.

$$\begin{array}{r}
 20,7\frac{1}{3} \\
 8,78\frac{1}{2} \\
 \hline
 16\ 56\frac{1}{2} \\
 144\ 9 \\
 \hline
 1656 \\
 25\frac{1}{2} \\
 2\ 92\frac{1}{2} \\
 \hline
 182\frac{1}{2} \mid 0\ 64\frac{1}{2} \\
 \quad \quad 20 \\
 \hline
 1280 \\
 11\frac{1}{2} \\
 \hline
 1^{\circ} \mid 291\frac{1}{2} \\
 \quad \quad 12 \\
 \hline
 582 \\
 291 \\
 \quad \quad 8 \\
 \hline
 5^{\circ} \mid 500
 \end{array}$$

La moltiplicazione de' numeri complessi suole anche eseguirsi riducendo all'ultima specie ed indi ad una sola frazione ordinaria ciascuno de' due fattori nel modo esposto a pag. 98, moltiplicando fra loro le frazioni così ottenute, e cambiando in numero complesso il prodotto delle due frazioni. Riprendiamo l'esempio precedente, e l'operazione sarà come qui appresso.

$ \begin{array}{r} 20^{\circ} \quad 14^{\circ} \quad 8^{\circ} \\ 20 \\ \hline 400 \\ 14 \\ \hline 414 \text{ sol.} \\ 12 \\ \hline 828 \\ 414 \\ \quad 8 \\ \hline 4976 \text{ denari} \\ 12 \times 20 \end{array} $	<i>per</i>	$ \begin{array}{r} 8^{\circ} \quad 6^{\circ} \quad 3^{\circ} \\ 8 \\ \hline 64 \\ 6 \\ \hline 70 \text{ pal.} \\ 12 \\ \hline 840 \\ 8 \\ \hline 848 \text{ oncie} \\ 12 \times 8 \end{array} $
---	------------	--

4976	96
843	12
14928	192
19904	96
39808	1152
4194768	20
189076	23040
47568	182' 1' 34' 1/2
1.° resto 1488	1152
2.° resto 336	96
48	2.° divisore
	3.° divisore

Il moltiplicando 20'. 14. 8' si è ridotto a 4976 denari, ed il moltiplicatore ad 843 once: per esprimere il primo in frazione di lira al numero 4976 si è dato il denominatore 12×20 , e per esprimere il secondo in frazione di canna al numero 843 si è dato il denominatore 12×8 . Si è poi diviso il prodotto de' numeratori 4976×843 per quello de' denominatori $96 \times 12 \times 20$; e dovendo il quoziente della divisione di 4194768 per 23040 esprimere lire, soldi e denari, dopo aver ricavate le lire 182, bisognava secondo la regola del §. 51 ridurre il resto 1488 in soldi moltiplicandolo per 20, ma per brevità si è diviso il divisore 23040 per 20, come era permesso (§. 42), ossia si è adottato in vece di tal divisore il numero 1152 ottenuto nella moltiplicazione de' denominatori delle frazioni. Allo stesso modo, in vece di moltiplicare per 12 il secondo resto 336 per ridurre i soldi in denari, si è diviso per 12 il divisore 1152, ossia si è adottato per 3.° divisore il numero 96 dato pure dalla suddetta moltiplicazione de' denominatori. È chiaro in fine che questa operazione offrirà il vantaggio dell'abbreviazione ora indicata, zenzore che nell'eseguire la moltiplicazione de' denominatori delle frazioni si riservino per ultimi fattori i numeri indicanti le suddivisioni delle unità nelle quali deve essere espresso il quoziente, cominciando dall'ultima specie e risalendo alla prima.

Ma la moltiplicazione de' numeri complessi si esegue a preferenza col metodo, così dett., di *prendere in parti*. Questo metodo è utilissimo perchè aguzz. l'ingegno de' giovani allievi, e si applica anche con vantaggio ne' calcoli numerici relativi a qualunque altro argomento, e specialmente a quelli dell'Astronomia pratica. Sia primieramente da moltiplicar un numero complesso, 20^{lire} 14^{solidi} 8^{denari} per un numero incompleso 3^{once}. Essendo il moltiplicando composto di più parti, analogamente al principio enunciato nel §. 17, si moltiplica ciascuna di esse separatamente pel moltiplicatore, e si sommano i prodotti ottenuti. Per seguire poi queste moltiplicazioni parziali si considera ogni parte decomposta in parti più piccole,

ma tali che ciascuna sia contenuta un esatto numero di volte nella parte precedente, cioè che sia, come suol dirsi, una parte *aliquota* della medesima; ed ogni prodotto si forma servendosi del principio accennato nel §. 40, *che in qualsivoglia moltiplicazione, se si divide uno de' due fattori per un numero qualunque, il prodotto risulta diviso per lo stesso numero*. Tutto ciò rimane meglio dichiarato dall' esempio;

$$\begin{array}{r}
 20' . 14' . 8'' \\
 8'' \\
 \hline
 160' \\
 \text{per } 10 \text{ soldi} \dots\dots\dots 4 \\
 \text{per } 4 \text{ soldi} \dots\dots\dots 1 . 12' \\
 \text{per } 2 \text{ soldi} \dots\dots\dots 16' \\
 \text{per } 8 \text{ denari} \dots\dots\dots 5' . 4'' \\
 \hline
 \text{Totale} \dots\dots\dots 165' . 17' . 4''
 \end{array}$$

Per moltiplicare 8 canne per 14 soldi, si è considerato il moltiplicando 14 decomposto in 10 soldi e 4 soldi, e si è detto: se il prodotto di 8 canne per 1 lira darebbe 8 lire, il prodotto di 8 canne per 10 soldi, che sono metà di una lira, dovrà dare la metà di 8 lire, cioè 4 lire; ed il prodotto di 8 canne per 4 soldi, che sono la quinta parte di una lira, dovrà dare la quinta parte di 8 lire, cioè 1' . 12". Per formare il prodotto per 8 denari si è preparato prima il prodotto *ausiliare* per 2 soldi, prendendo la metà del prodotto precedente, e poi si è detto; se il prodotto per 2 soldi è stato 16 soldi, il prodotto per 8 denari, che sono la terza parte di 2 soldi, sarà la terza parte di 16 soldi, cioè 5' . 4". Il prodotto per 2 soldi, che non doveva far parte del prodotto totale, si è trasportato più a destra escludendolo dalla somma.

In secondo luogo sia da moltiplicarsi lo stesso numero complesso 20'. 14'. 8" per l'altro numero complesso 8^{canne} 6^{onze} 3^{once}. L'operazione procederà nel modo seguente

$$\begin{array}{r}
 20' . 14' . 8'' \\
 8'' . 6'' . 3''' \\
 \hline
 160' \\
 \text{per } 10 \text{ soldi} \dots\dots\dots 4 \\
 \text{per } 4 \text{ soldi} \dots\dots\dots 1 . 12' \\
 \text{per } 2 \text{ soldi} \dots\dots\dots 16' \\
 \text{per } 8 \text{ denari} \dots\dots\dots 5' . 4'' \\
 \hline
 \text{per } 4 \text{ palmi} \dots\dots\dots 10 . 7 . 4'' \\
 \text{per } 2 \text{ palmi} \dots\dots\dots 5 . 3 . 8'' \\
 \text{per } 1 \text{ palmo} \dots\dots\dots 2' . 11' . 10'' \\
 \text{per } 3 \text{ once} \dots\dots\dots 12 . 11 \frac{1}{2}'' \\
 \hline
 \text{Prodotto totale} \dots\dots\dots 182' . 1' . 34\frac{1}{2}''
 \end{array}$$

Dopo aver eseguito come sopra il prodotto di 8 *canne* per tutto il moltiplicando, si è proceduto alla formazione de' prodotti di 6 *palmi* e di 3 *once* pel moltiplicando stesso (§. 17). Si è considerato il moltiplicatore 6 *palmi* decomposto in 4 *palmi* e 2 *palmi*, e si è detto; se il prodotto di 1 *canna* per 20'. 14". 8^a darebbe 20'. 14". 8^a, il prodotto di 4 *palmi*, che sono metà di una *canna*, per lo stesso numero darà la metà di 20'. 14". 8^a, cioè 10'. 7". 4^a; ed il prodotto di 2 *palmi*, metà di 4 *palmi*, per 20'. 14". 8^a darà la metà di 10'. 7". 4^a, cioè 5'. 3". 8^a. Per passare al prodotto di 3 *once* per 20'. 14". 8^a, si è dovuto anche qui premettere il prodotto *ausiliare* per 1 *palm*o, del quale si è presa poi la quarta parte.

Per un altro esempio, sia proposta la seguente quistione: due mercanti, volendo fare tra loro un cambio di pepe con cannella, convengono che una libbra di cannella debba equivalere a 5 *rotoli*, 15 *once*, 7 *dramme*, 2 *scrupoli*, 1 *acino* di pepe; si domanda quanto pepe dovrà darsi in cambio di 12 *libbre*, 4 *once*, 6 *dramme*, 1 *scrupolo* di cannella? È chiaro che la quantità di pepe da darsi in cambio si conoscerà moltiplicando 5 *rotoli*, 15 *once* etc: per 12 *libbre*, 4 *once* etc: Per eseguire questa moltiplicazione deve premettersi che il *rotolo* di Napoli si divideva anticamente in *once* 33^a, l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in tre *scrupoli*, o *trappesi*, lo scrupolo in 20 *acini*; e la libbra napoletana si componeva di 12 *once*, eguali a quelle del *rotolo*, e similmente divise. Ma sarebbe molto incomodo ritenere nel calcolo la frazione di *rotolo* sotto l'aspetto di frazione complessa, mentre con grande facilità può ridursi a frazio-

ne decimale: in fatti ogni oncia essendo $\frac{1}{33\frac{1}{2}}$, ovvero $\frac{2}{100}$ di *rotolo*, un dato numero di *once* si ridurrà a centesimi di *rotolo* moltiplicandolo per 3; similmente la dramma, decima parte dell'oncia, vale $\frac{2}{1000}$ di *rotolo*, ed un numero di *dramme* sarà ridotto in millesimi moltiplicandolo per 3; lo scrupolo, terza parte della dramma, vale $\frac{2}{10000}$ di *rotolo*; e l'acino ventesima parte dello scrupolo, equivale a mezzo decimo di scrupolo, per cui un dato numero di *acini* sarà ridotto a decimi di scrupolo, ossia a diecimillesimi di *rotolo*, prendendone la metà. Per cambiare una frazione decimale di *rotolo* in frazione complessa si eseguiranno le operazioni contrarie, cioè si prenderà la terza parte de' centesimi e si avranno le *once*; abbassati i millesimi a fianco de' centesimi che rimangono, e presa la terza parte del numero risultante, si avrà per quoziente il numero delle *dramme* e per resto quello degli *scrupoli*; finalmente si raddoppieranno i diecimillesimi e si otterranno gli *acini*. Tutto ciò si vede applicato nell'operazione che segue.

3 ^{re} .	15 ^m .	7 ^{d.}	2 ^{de} .	17 ^m .	
	45			8,5	
	21				
	285				
	5, 47	385			
12 ^{de} .	4 ^m .	6 ^{d.}	1 ^{re} .		
	10, 94	770			
	54	7385			
per 4 onces	8246	17	($\frac{1}{2}$)	del moltiplicando	
per 5 drammae	2280	77	($\frac{1}{2}$)	del precedente	
per 1 dramma	456	15	($\frac{1}{2}$)	idem	
per 1 scrupolo	1520	5	($\frac{1}{2}$)	idem	
Totale	67, 79	971	$\frac{1}{2}$		
	26 ^m .				
	19				
	6 ^{d.}				
	1 ^{re} .	14 ^m .	28		
	67 ^{re} .	26 ^m .	6 ^{d.}	1 ^{re} .	14 ^m .
					28

Il metodo di prendere in parti può servire anche in alcune circostanze ad ottenero una quantità che, diversamente, dovrebbe risultare da due operazioni, cioè da una moltiplicazione e da una divisione. Per esempio, sapendosi che una macchina a vapore applicata ad una manifattura dà un prodotto di 540 canne 6 palmi e 5 onces in 12 ore, si desidera sapere qual prodotto darà in 5 ore 33 minuti e 45 secondi? Per rispondere a questo quesito bisognerebbe dividere 540°. 6'. 5^m per 12, a fin di conoscere il prodotto in un'ora, ottenuto il quale si moltiplicherebbe per 5^{re}. 33^m. 45^s, e si avrebbe il prodotto cercato. Ma l'operazione procederà più semplicemente riflettendo che nella metà di un certo tempo la macchina deve dare la metà del prodotto corrispondente al tempo medesimo, nella terza parte di quel tempo deve dare la terza parte del prodotto, e così di seguito. Laonde si otterrà il prodotto domandato col metodo di prendere in parti, come qui appresso.

In 12 ore il prodotto della macchina è .. 540°. 6'. 5^m

In 4 ore il prodotto sarà la terza parte. 180°. 2'. 1^m. 3^m $\frac{1}{2}$

In 1 ora la quarta parte del precedente. 45°. 0'. 6". 2 $\frac{1}{2}$

In 30 minuti la metà 22°. 4'. 3". 1 $\frac{1}{2}$

In 3 minuti la decima parte 2°. 2'. 0". 1 $\frac{1}{2}$

In 45 secondi la quarta parte 0°. 4'. 6". 0 $\frac{1}{2}$

Somma In 5^{re}. 30^m. 40^s il prodotto totale della

macchina sarà 250°. 5'. 5". 3 $\frac{1}{2}$

Si avverte che nel prender le parti de' numeri dell'ultima specie quando vi è unita una frazione, bisogna prima ridurli ad una sola frazione e poi prenderne la parte domandata. Così per trovare la decima parte di $16^{\frac{1}{4}}$, si ridurrà questa espressione a $2^{\frac{4}{5}}$ di minuto, di cui la decima parte sarà $\frac{2^{\frac{4}{5}}}{10} = 1^{\frac{4}{50}} = 1^{\frac{2}{25}}$. Ma sarà sempre più facile usare le frazioni decimali nel prender le parti dell'ultima specie, limitando il numero delle cifre decimali ad un ordine di unità così piccole che gli errori di calcolo su quella ultima cifra possano con certezza considerarsi insignificanti.

Finalmente il metodo di *prendere in parti* si applica qualche volta con vantaggio anche alla moltiplicazione de' numeri astratti uniti alle frazioni. Per esempio, dovendo moltiplicare $54^{\frac{2}{3}}$ per $41^{\frac{1}{2}}$, in vece di eseguire i quattro prodotti di cui è parola nel §. 30 con le regole ordinarie, si potrà moltiplicare prima un intero per l'altro, poi prendere la terza parte di 41 e replicarla, onde ottenere il prodotto di 41 per $\frac{2}{3}$, indi prendere la metà di $54^{\frac{2}{3}}$, e la metà della metà per formare il prodotto di $54^{\frac{2}{3}}$ per $\frac{1}{2}$, che comprenderà i due prodotti di 54 per $\frac{1}{2}$, e di $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$. Ecco il calcolo;

$$\begin{array}{r}
 54^{\frac{2}{3}} \\
 41^{\frac{1}{2}} \\
 \hline
 54 \\
 216 \\
 13^{\frac{2}{3}} \\
 13^{\frac{2}{3}} \\
 27^{\frac{1}{3}} \\
 13^{\frac{2}{3}} \\
 \hline
 2282^{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

È chiaro che questa maniera di operare non può riuscir utile se non quando le frazioni unite agl'interi sono molto semplici.

§. 53.

Della divisione de' numeri complessi.

Nella divisione de' numeri complessi possono considerarsi due casi;
 1.º quando il dividendo ed il divisore sono di diverso genere,
 2.º quando il dividendo ed il divisore sono dello stesso genere.

1.º CASO. In questo caso il divisore è, o può considerarsi come un numero astratto, per cui il quoziente deve essere dello stesso genere del dividendo (§. 49), e la divisione può sempre ridursi a quella di un numero complesso per un numero incompleto, come apparirà chiaro dagli esempi.

Primo esempio. Una somma di 448 lire 10 soldi 3 denari deve distribuirsi a 23 persone; si domanda quanto spetterà a ciascuno? Qui, trat-

tandosi di decomporre il numero proposto in 24 parti eguali, il divisore è realmente un numero astratto, e la divisione si eseguirà come su i numeri interi, ma a più riprese, formando di ogni resto un nuovo dividendo, con ridurlo in unità della specie seguente ed aggiungervi le unità della stessa specie contenute nel numero proposto, e così continuando sino all'ultima specie. Ecco l'operazione;

$$\begin{array}{r}
 448^{\text{li}} \cdot 10^{\text{so}} \cdot 3^{\text{d}} \quad \left| \begin{array}{l} 24 \\ 18^{\text{li}} \cdot 13^{\text{so}} \cdot 9^{\text{d}} \cdot \frac{1}{8} \end{array} \right. \\
 \underline{208} \\
 16 \\
 \underline{20} \\
 320^{\text{so}} \\
 \underline{10} \\
 2.^{\circ} \text{ dividendo } 330 \\
 \underline{90} \\
 18 \\
 \underline{12} \\
 36 \\
 \underline{18} \\
 3 \\
 3.^{\circ} \text{ dividendo } 219^{\text{d}} \\
 \underline{3}
 \end{array}$$

Si sono divise 448^{li} per 24, e si è ottenuto il quoziente 18^{li} ed il resto 16^{li}; con questo resto, moltiplicato per 20 per ridurlo in *soldi*, ed aggiuntivi i 10^{so} contenuti nel numero proposto, si è formato il secondo dividendo 330^{so}, che ha dato per quoziente 13^{so} e per nuovo resto 18^{so}; ridotto in denari questo numero di soldi con moltiplicarlo per 12, ed aggiuntivi i 3^d del numero proposto, si è ottenuto il terzo dividendo 219^d, e da esso l'ultima parte del quoziente 9^d.

Secondo esempio. Con 1350^{lire} 14^{solidi} 10^{denari} si sono comprate 32^{cannas} 3^{braccia} 4^{oncie} di stoffa, si domanda quanto si è pagato per ogni canna? Cambiando il divisore 32^{so} · 3^{so} · 4^{so} in numero incompleso (§. 51) si avrà 32^{so} · $\frac{3}{16}$, ovvero $\frac{3}{16}$, e l'operazione sarà ridotta a dividere la proposta somma di lire, soldi e denari per la frazione $\frac{3}{16}$, cioè a moltiplicarla per 12 e dividerla per 384 (§. 31). La moltiplicazione si eseguirà con le regole date nel §. 52, e la divisione col metodo usato nell'esempio precedente. Aggiungiamo per maggior chiarezza il calcolo, adottando per la moltiplicazione il metodo di prendere in parti.

$$\begin{array}{r}
 1350^{\text{denari}} 14^{\text{soldi}} 10^{\text{denari}} \\
 \underline{12} \\
 2700 \\
 135
 \end{array}$$

per 10 soldi 6 ($\frac{3}{5}$) del moltiplicatore

per 4 soldi 2 8' ($\frac{1}{5}$) idem

per 8 denari 8 ($\frac{1}{5}$) del precedente

per 2 denari 2 ($\frac{1}{5}$) idem

$$\begin{array}{r}
 16208^{\text{denari}} 18^{\text{soldi}} \quad | \quad 389 \\
 \underline{648} \quad | \quad 41^{\text{denari}} 13^{\text{soldi}} 4^{\text{denari}} \frac{2}{5} \\
 259 \\
 \underline{20} \\
 5180 \\
 \underline{18}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2.^{\circ} \text{ dividendo } 5198 \\
 \underline{1308} \\
 141 \\
 \underline{12} \\
 282 \\
 \underline{141}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3.^{\circ} \text{ dividendo } 1692 \\
 \underline{136}
 \end{array}$$

2.° caso. In questo caso il quoziente è in generale un numero astratto, perchè dinota quante volte il divisore è contenuto nel dividendo dello stesso genere, o qual parte è del medesimo. Assolutamente astratto è quando la divisione non ha altro oggetto se non di conoscere appunto la relazione di quantità che esiste fra due numeri dello stesso genere, o come suol dirsi il loro *rapporto*, per esempio quando si volessero paragonare le forze di due eserciti composti uno di 24000 uomini e l'altro di 6000, o le ricchezze di due banchieri, il primo de' quali possedesse un capitale di 50000 ducati e l'altro di 30000; allora la divisione ci farebbe conoscere che il primo esercito è quattro volte più forte del secondo, e che uno de' due banchieri possiede $\frac{1}{3}$ di ciò che possiede l'altro. Ma può occorrere in altre quistioni che la relazione di quantità fra due numeri dello stesso genere, data dal quoziente della divisione di uno per l'altro, debba essere espressa da un numero concreto e complesso, siccome apparirà da seguenti esempi; in qualunque circostanza però, sempre che il divisore è dello stesso genere del dividendo, il quoziente dovrà essere di genere diverso (§. 49), per cui l'operazione non potrà ridursi come nel caso precedente alla divisione di un numero complesso per un incompleso, poichè quando un numero complesso si divide per un incompleso non si fa se non che prenderne una data parte, e quindi il quoziente deve ritenere

numeri dati in unità dell'ultima specie, come nella prima maniera di ridurre i numeri complessi ad incompletti esposta a pag. 98, e dividendoli uno per l'altro con esprimere il quoziente in forma di numero astratto o di numero complesso, a norma della quistione che ha dato motivo al calcolo. Eccone un esempio.

Secondo esempio. Si sono comprate 3^{canne} 4^{braccia} 3^{denari} di una certa stoffa per una lira; si domanda per comprare 7⁵ 6⁶ 6⁶ della medesima stoffa quanto si dovrà sborsare? È chiaro che la somma cercata si otterrà dividendo 7⁵ . 6⁶ . 6⁶ per 3[°] . 4[°] . 3[°], ed esprimendo il quoziente in lire, soldi e denari, poichè quante volte 7⁵ . 6⁶ . 6⁶ contengono 3[°] . 4[°] . 3[°], che importano una lira, altrettante lire si dovranno sborsare. L'andamento dell'operazione sarà come segue.

7 ⁵ . 6 ⁶ : 6 ⁶	3 [°] . 4 [°] . 3 [°]
8	8
600	24
6	4
606	28
12	12
1212	56
606	28
6	3
7278	339
498	21 ⁴ : 9 [°] : 4 ²¹⁰⁸
159	
20	
3180 [°]	
129	
12	
258	
129	
1548 [°]	
192	

I due numeri proposti si sono ridotti a 7278 *once* e 339 *once*, e la divisione si è eseguita su questi numeri esprimendo il quoziente in lire, soldi e denari; perocchè i proposti due numeri complessi equivalgono alle frazioni di canna $\frac{2\frac{5}{6} \frac{7}{8}}{3}$, $\frac{2\frac{5}{6} \frac{7}{8}}{3}$, le quali avendo lo stesso denominatore si dividono una per l'altra dividendo i soli numeratori. Ma nell'usare questo metodo, bisogna badar bene che l'ultima specie alla quale si riducono i due numeri complessi sia la stessa per entrambi, affinchè i denominatori, non espressi ma sottintesi nella divisione, siano eguali: per esempio

dovendo dividere $4^{\circ} . 3^{\circ} \frac{1}{2}$ per $2^{\circ} . 2^{\circ} . 3^{\circ} \frac{1}{2}$, si ridurrà il dividendo in palmi e si avrà $35 \frac{1}{2}$, e questo numero di palmi si ridurrà anche in oncie moltiplicandolo per 12, perchè il divisore contiene oncie; i due numeri incompletti su i quali dovrà eseguirsi la divisione saranno dunque, $422 \frac{1}{2}$, $219 \frac{1}{2}$.

TEORICA DELLE RAGIONI E DELLE PROPORZIONI.

§. 54.

Della ragione e della proporzione in generale.

1. Due grandezze qualunque dello stesso genere possono paragonarsi fra loro in due diversi modi; 1.^o osservando di quanto una supera l'altra, 2.^o osservando quante volte una è contenuta nell'altra, o più generalmente, che parte una è dell'altra. Per esempio due amici paragonano il denaro che hanno in tasca: uno ha 6 ducati, o l'altro ne ha 2; quello che ha 6 ducati può dire all'altro che ne ha 2, *io ho quattro ducati più di te*, e può dire ancora, *il mio denaro è triplo del tuo*; reciprocamente quello che ha 2 ducati può dire all'altro, *io ho quattro ducati meno di te*, oppure, *il mio denaro è terza parte del tuo*. Se i due numeri fossero 5 e 3, paragonando il maggiore al minore potrebbe dirsi, o che lo supera di due unità, o che è cinque terzi, di esso; e viceversa, paragonando il minore al maggiore si direbbe, o che gli è inferiore per due unità, o che è tre quinti di esso (§. 53). Il primo modo di paragone ci dà idea del *rapporto o ragione aritmetica*, ed il secondo, del *rapporto o ragione geometrica*; ma qualunque sia la maniera di paragonare le quantità, è chiaro che il paragone non potrà farsi se esse non siano dello stesso genere, o *omogenee*; chiamandosi, al contrario, *eterogenee* le grandezze di genere diverso.

Rapporto o ragione aritmetica di due quantità dello stesso genere è dunque la loro differenza; e rapporto o ragione geometrica di due quantità dello stesso genere è il quoziente della divisione di una per l'altra, o altrimenti, la frazione vera o spuria che ha per termini quelle quantità.

Occupandoci, per ora, de' soli rapporti geometrici, ricorderemo che essi sono sempre numeri astratti (§§. 49, 53), e quindi indipendenti dalla natura o qualità delle grandezze che si paragonano; così il numero 3 serve egualmente ad indicare il rapporto di 6 ducati e 2 ducati, e quello di 12 rotoli e 4 rotoli della stessa merce.

Un rapporto geometrico si scrive separando con due punti le quantità che lo compongono; per esempio il rapporto de' numeri 6 e 2 si scrive, $6 : 2$, e si legge *6 sta a 2*, o pure *6 a 2*. Le quantità che si paragonano diconsi *termini* del rapporto, ed il primo

termine si chiama *antecedente*, il secondo *conseguente*; nella ragione di 6 : 2 l'antecedente è 6, ed il conseguente è 2.

II. Una ragione geometrica non cambia di valore se si moltiplicano o si dividono i suoi termini per la stessa quantità.

Questa proposizione è evidente, perchè una ragione geometrica equivale ad una frazione, e si sa che il valore di una frazione, rimane inalterato se i termini di essa si moltiplicano o si dividono per un medesimo numero (§ 15). Così la ragione di 8 : 6 è la stessa di quella di 24 : 18, o dell'altra di 4 : 3. Una importante conseguenza di questa proprietà è, che un rapporto di due numeri combinati con frazioni in qualsivoglia modo, può sempre ridursi al rapporto di due numeri interi. In fatti, se si abbia il rapporto di un intero ad una frazione, come $3 : \frac{2}{3}$, si ridurrà l'intero ad una frazione dello stesso denominatore della frazione proposta, e si avrà, $\frac{6}{3} : \frac{2}{3}$, indi si moltiplicheranno i termini del rapporto pel denominatore comune, e si otterrà una ragione fra due numeri interi equivalente alla prima, cioè 15 : 2. Se il rapporto fosse di una frazione ad una frazione, o ad un intero e frazione, è chiaro che si potrebbe sempre ridurre a quello di due frazioni aventi lo stesso denominatore, e quindi al rapporto di due numeri interi. Per esempio il rapporto di $\frac{2}{7} : 2\frac{1}{2}$ si cambia nell'altro di $\frac{2}{7} : \frac{5}{2}$, o di $\frac{4}{14} : \frac{25}{14}$, o in fine di 4 : 25. Da ciò risulta ancora che, il rapporto di due frazioni che hanno lo stesso denominatore è eguale a quello de' loro numeratori.

III. Il rapporto di due quantità essendo un numero astratto indicante che parte una è dell'altra, serve anche a mostrare come la maggiore potrebbe comporsi per mezzo della minore. Per esempio il rapporto de' numeri 12 ed 8 è $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, e significa che 12 è tre mezzi di 8; quindi per comporre il 12 per mezzo dell'8, bisogna aggiungere ad 8 la sua metà. Similmente il rapporto de' numeri 16 e 6 è $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, e questo numero dimostra che il 16 si compone prendendo due volte il 6, e due volte la sua terza parte e formandone un sol tutto, cioè $16 = 6 + 6 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$. E poichè misurare una quantità significa comporla, o valutarla per mezzo di un'altra quantità più piccola dello stesso genere presa per unità (*), nel rapporto di due grandezze la maggiore può considerarsi misurata per mezzo della minore.

Il rapporto di due grandezze dicesi *commensurabile* sempre che vien espresso da un numero intero o da un numero frazionario, perchè allora la grandezza maggiore può sempre misurarsi esattamente per mezzo della minore o di una parte aliquota (§. 52) di essa. Così, nel rapporto de' numeri 12 e 4, il 12 si misura considerandolo come l'unione o l'aggregato di tre numeri eguali

(*) Quando si dice che una quantità di grano è 20 *tomoli*, o una quantità d'olio è 5 *salme*, s'intende che la data massa di grano è 20 volte il grano di cui è capace la misura detta *tomolo*, e il dato volume d'olio, è 5 volte l'olio corrispondente alla *salma*.

a 4; e nel rapporto de' numeri 12 e 9, il 12 si misura considerandolo come l'aggregato di quattro numeri eguali a 3, terza parte di 9. In questo secondo esempio il numero 3 misura anche il 9, che lo contiene esattamente tre volte, e però dicesi comune misura de' numeri 12 e 9. Se i due numeri fossero 3 e $\frac{2}{3}$, la loro comune misura sarebbe $\frac{1}{3}$, che è contenuto due volte nel $\frac{2}{3}$ e quindici volte nel 3. Un rapporto di due grandezze è quindi *commensurabile* quando la minore è contenuta esattamente nella maggiore, o quando si può trovare una grandezza più piccola della minore che sia contenuta esattamente in entrambe; o altrimenti, un rapporto di due grandezze è *commensurabile* quando esse possono avere una comune misura, che in alcuni casi è la grandezza minore, ed in altri è una quantità più piccola.

È chiaro poi che in generale quando un rapporto è commensurabile, se ne potrà sempre determinare con esattezza il valore. In fatti se due numeri, o generalmente due quantità N, n , hanno una comune misura m , questa dovrà esser contenuta un esatto numero di volte tanto in N che in n ; e quindi supponendo che la quantità maggiore la contenga 15 volte, e la minore 2 volte, la prima risulterà dal prodotto di m per 15 e la seconda da quello di m per 2 (§. 9). Laonde il rapporto delle quantità N, n si cambierà in quello de' prodotti $m \times 15, m \times 2$, cioè in $\frac{m \times 15}{m \times 2}$; e cancellando in questa frazione il fattore m comune al numeratore ed al denominatore, il rapporto delle grandezze N, n verrà rappresentato dalla frazione $\frac{15}{2}$, ossia dal rapporto de' numeri 15 e 2, siccome si è veduto di sopra pe' numeri 3 e $\frac{2}{3}$.

La precedente osservazione ci addita il modo di ridurre un rapporto di due quantità qualunque N, n a quello di due numeri interi cercando la comune misura m fra le quantità proposte; e per ottenere anche la più semplice espressione di un tal rapporto, sarà utile cercare la massima comune misura fra quelle quantità, perchè quanto più grande sarà la comune misura m che entra come fattore ne' termini della frazione esprimente il rapporto, più semplice risulterà la frazione medesima sopprimendo quel fattore. Nel §. 20 si è data la regola per trovare il massimo comune divisore fra due numeri, che consiste nel dividere il numero maggiore pel minore, indi il minore pel resto della divisione, poi il primo resto pel secondo, e così di seguito, sino ad ottenere una divisione senza resto, il divisore della quale è il massimo comune divisore richiesto. Se però le due quantità di cui si cerca la massima comune misura non fossero numeri, e si dovesse per esempio trovare il rapporto, e quindi la massima comune misura, fra due lunghezze date, allora l'operazione non potrebbe procedere come pe' numeri, ma sarebbe facile sostituire la sottrazione ripetuta a ciascuna divisione voluta dalla regola (§. 9). Si toglierà dunque la lunghezza minore dalla maggiore tante volte quante sarà possibile, indi si toglierà anche ripetutamente il resto dalla lunghezza minore, poi si farà lo stesso col secondo resto rispetto al primo, e così andando avanti, sino a che togliendo ripetutamente un ultimo resto dal precedente non vi sia più resto alcuno. Sarà facile calcolare quante volte l'ultimo resto, ossia la massima comune misura, è contenuta nella lunghezza minore e quante volte nella maggiore, e così queste lunghezze potranno essere rappresentate da due numeri interi esprimenti ciascuno un aggregato di unità eguali alla lunghezza ottenuta come massima comune misura; quindi al rapporto delle due lunghezze proposte potrà sostituirsi quello de' due numeri così ottenuti.

Per esempio la lunghezza minore sia contenuta 3 volte nella maggiore

con un resto, e questo resto 4 volte nella minore con un secondo resto, ed il secondo resto 2 volte nel primo esattamente; il secondo resto sarà la massima comune misura. E poichè il primo resto è doppio del secondo, la lunghezza minore, che si compone del quadruplo del primo resto e del secondo resto, conterrà nove volte il secondo resto o la massima comune misura; e la lunghezza maggiore che si compone del triplo della minore e del primo resto, conterrà ventinove volte la massima comune misura, onde il rapporto delle due lunghezze sarà eguale a quello de' numeri 9 e 29.

Analogamente a ciò che si è detto del rapporto commensurabile, un numero qualunque dicesi *commensurabile* allorchè può esser misurato esattamente dalla sua unità, o avere con essa una comune misura. Tutti i numeri interi o frazionarii sono perciò commensurabili; così $7\frac{3}{4}$ non è misurato esattamente dall'unità, ma dalla frazione $\frac{1}{4}$, che essendo contenuta trentuno volte in $7\frac{3}{4}$, e quattro volte in 1, può considerarsi come loro comune misura. I numeri interi o frazionarii diconsi anche *razionali*, perchè si può sempre esattamente assegnare il rapporto o la ragione che serbano all'unità; nell'esempio precedente il rapporto di $7\frac{3}{4}$ all'unità è quello di $\frac{31}{4} : 1$, ossia di 31 : 4 (II).

Al contrario le radici quadrate o cubiche de' numeri, che non sono quadrati o cubi perfetti, non hanno mai un rapporto esatto coll'unità, giacchè si è veduto (§. 46) che esse non possono esprimersi nè per mezzo di numeri interi, nè per mezzo di numeri frazionarii, ma debbono considerarsi come decimali a periodo infinito. Per questo motivo quelle quantità si sono chiamate *irrazionali*, cioè mancanti di ragione esatta con l'unità, e diconsi anche *incommensurabili* perchè non si possono esattamente misurare nè per mezzo dell'unità nè per mezzo di una sua parte comunque si voglia piccola. Allo stesso modo, un rapporto si chiama *incommensurabile* o *irrazionale* quando non esiste una esatta comune misura fra i suoi termini, ossia quando non può assegnarsi il valore di esso esattamente; per esempio il rapporto di $\sqrt{2} : 3$ è incommensurabile, perchè estraendo la radice quadrata dal 2 si cambia in 1,4142136 : 3, e la frazione decimale, non terminando mai, dà origine ad infiniti rapporti diversi, secondo che se ne prende un maggior numero di cifre. Così, spezzandola dopo tre cifre il rapporto sarà $1,414 : 3$, ovvero $\frac{1414}{1000} : 3$, equivalente al rapporto de' numeri interi 1414 e 3000; spezzandola alla quinta cifra il rapporto sarà quello de' numeri 141421, 300000 etc. Ma quantunque non possa assegnarsi il valore esatto del rapporto $\sqrt{2} : 3$, sarà in nostro arbitrio di approssimarci ad esso quanto vorremo, prendendo sempre un maggior numero di cifre decimali, sino a che l'errore divenga piccolissimo ed assolutamente trascurabile. Si prendano sei cifre decimali, ed il rapporto sarà espresso dalla frazione $\frac{141421}{100000} : 3$; se ne prendano sette ed il rapporto sarà $\frac{1414213}{1000000} : 3$, che non differisce dal precedente se non per $\frac{4}{10000000}$, e questa differenza già piccolissima diminuirebbe anche più adottando un numero più grande di cifre decimali. Il rapporto $\sqrt{2} : 3$, ovvero la frazione $\frac{\sqrt{2}}{3}$, è dunque un *limite* (§. 43) al quale continuamente si accostano,

senza raggiungerlo mai, tutti i molteplici e successivi rapporti che possono formarsi col decimale a periodo infinito 1,4142 ... e col numero 3.

IV. Da quanto precede apparisce chiaramente che la circostanza di non potersi assegnare il preciso valore di un rapporto incommensurabile non cam-

bia la natura di un tal rapporto, il quale dovrà sempre considerarsi come il quoziente di una divisione, con la differenza che per le quantità irrazionali, esso non si potrà ottenere esattamente ma con un'approssimazione indefinita, non dissimile nell'uso dalla esattezza. In conferma di questa verità osserveremo che se si rappresenti un rapporto incommensurabile per mezzo di una frazione ordinaria i cui termini siano indefiniti, come $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$, dividendo il numeratore ed il denominatore di essa pel numeratore, si avrà

l'espressione equivalente $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$, e dividendo i termini della nuo-

va frazione $\frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \dots}}}}$ pel suo numeratore, si otterrà $\frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \dots}}}}$

e così continuando indefinitamente, il rapporto incommensurabile si cambierà nella frazione continua di un numero infinito di termini,

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$$

dalla quale, prendendo successivamente uno, due, tre e più termini, si ricaverà una serie di frazioni ordinarie

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{10}, \frac{5}{17}, \text{etc.}$$

che si approssimeranno gradatamente nel loro valore al rapporto incommensurabile proposto (§. 21), senza poterlo mai raggiungere. Or l'operazione che ha servito a mutar questo rapporto in una frazione continua è la stessa proposta di sopra (III) per ridurre un rapporto commensurabile di due quantità qualunque a quello di due numeri interi, poichè l'una e l'altra consistono nella ricerca della massima comune misura fra i termini del rapporto (§. 21). Dunque il modo di valutare in numeri il rapporto commensurabile e incommensurabile che serbano l'una all'altra due quantità qualunque è unicamente, di sottrarre la grandezza minore dalla maggiore quante volte è possibile, ed essendovi un resto, sottrarlo quante volte si può dalla grandezza minore, indi togliere anche ripetutamente il secondo resto, se ve n'è, dal primo, e poi il terzo dal secondo e così di seguito; se le due grandezze proposte saranno fra loro commensurabili, l'operazione avrà un termine, e coi numeri esponenti, nelle ripetute sottrazioni, quante volte le quantità minori erano contenute nelle maggiori si potrà formare una frazione continua, che ridotta a frazione ordinaria darà il rapporto numerico cercato; se le due grandezze saranno fra loro incommensurabili l'operazione progredirà all'infinito, cioè la frazione continua avrà un numero infinito di termini, e se ne potrà ricavare una serie di frazioni il cui valore andrà man mano accostandosi al rapporto numerico richiesto sino a differirne di una quantità piccolissima ed assolutamente trascurabile.

V. Quando il rapporto di due quantità è lo stesso di quello di due altre, le quattro quantità diconsi in *proporzione*, e quindi,

per proporzione s'intende l'eguaglianza di due rapporti. Una proporzione si scrive così, $6 : 2 :: 12 : 4$, e si legge, 6 sta a 2 come 12 sta a 4; essa, contenendo due ragioni, è composta di quattro termini, cioè di due *antecedenti* e di due *consequenti*. Il primo ed il quarto termine si chiamano termini *estremi*, e gli altri due diconsi termini *medii*. Una proporzione che ha i termini medii eguali fra loro prende il nome di *proporzione continua*, e si scrive più brevemente così, $\div 9 : 3 : 1$.

Ogni rapporto potendo esser rappresentato da una frazione, l'eguaglianza di due rapporti, cioè la proporzione, corrisponde all'eguaglianza di due frazioni. E siccome il rapporto di due quantità è un numero astratto, mentre è indispensabile che i termini di una medesima ragione siano quantità *omogenee*, non è necessario che lo siano tutti quattro i termini di una proporzione, ma i termini della prima ragione potranno essere *eterogenei* con quelli della seconda, perchè l'eguaglianza di due ragioni è sempre l'eguaglianza di due numeri astratti. È chiaro poi che l'ordine di grandezza de' termini della prima ragione dovrà esser lo stesso di quello dei termini della seconda ragione, cioè se il primo termine della proporzione è minore, eguale o maggiore del secondo, la stessa relazione dovrà sussistere fra il terzo ed il quarto termine.

Poichè il rapporto di due quantità esprime il modo di comporre una di esse per mezzo dell'altra (III), in una proporzione qualunque il primo termine dovrà comporsi per mezzo del secondo come il terzo si compone per mezzo del quarto. Sotto questo punto di veduta la *Moltiplicazione* de' numeri ci ha offerto il primo esempio della proporzione (§§. 8, 27), e dal significato di quella operazione si scorge che in generale, il *prodotto* sta al *moltiplicando* come il *moltiplicatore* sta all'*unità*. La divisione, non essendo che una moltiplicazione rovesciata, se ne può anche desumere, sempre che si voglia, una proporzione, ma è chiaro che l'ordine de' termini cambierà secondo che dovrà figurare da numero astratto il divisore o il quoziente (§. 49).

Da ciò che si è detto di sopra delle quantità incommensurabili risulta che una proporzione contenente queste quantità deve pure considerarsi come l'eguaglianza di due quozienti, o sia di due frazioni, quantunque non se ne possano assegnare esattamente i valori; e dal modo di valutare in numeri il rapporto di due grandezze qualunque si può inoltre ricavare un criterio generale per conoscere quando quattro grandezze sono proporzionali. Si eseguiranno sulle prime due grandezze le sottrazioni successive superiormente indicate (IV), e le stesse operazioni si faranno sulle altre due; se i risultamenti delle prime operazioni, comunque prolungate, si accorderanno esattamente con quelli delle seconde, le quattro grandezze saranno in proporzione. Il che equivale a dire che, se le frazioni continue, terminate o indefinite, ottenute dal paragone delle prime due grandezze fra loro, e delle seconde fra loro, riescono identiche in tutte le loro parti, qualunque estensione si dia a quelle frazioni, le quattro grandezze saranno proporzionali (*).

(*) Questa maniera generale di considerare la proporzione geometrica ci è stata indicata dal nostro amico e collega il chiaris. prof. de Angelis.

Ma 5 e 9 sono i termini estremi della proporzione; e 3, e 15 sono i termini medii, dunque rimane dimostrata la proprietà fondamentale della teoria delle proporzioni enunciata qui sopra, cioè che *in ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi, eguaglia il prodotto de' medii.*

È chiaro che, inversamente, se il prodotto di due quantità eguaglia il prodotto di due altre, le quattro grandezze sono proporzionali; e per disporle in proporzione, i fattori di un prodotto dovranno figurare da *estremi*, ed i fattori dell'altro prodotto da *medii*, di modochè si scriverà prima uno de' fattori del primo prodotto poi ambedue i fattori del secondo ed in ultimo il rimanente fattore del primo prodotto. Così dall'eguaglianza di due prodotti, $4 \times 9 = 12 \times 3$, si passerà ad una proporzione scrivendo, $4 : 12 :: 3 : 9$.

Nella proporzione continua, i termini medii essendo eguali, il loro prodotto si potrà considerare come il quadrato di uno di essi, e quindi la proprietà fondamentale si enuncia, per questa specie di proporzioni, come segue: *in una proporzione continua il prodotto de' termini estremi eguaglia il quadrato del termine medio.*

§. 56.

Cambiamenti di luogo che possono effettuarsi ne' termini di una proporzione.

La proprietà dimostrata nel §. precedente può servire di criterio per assicurarsi se quattro numeri sono in proporzione, e basterà a quest'oggetto osservare se il prodotto de' termini estremi eguaglia quello de' termini medii. Così i quattro numeri 3, 5, 6, 10 sono in proporzione, perchè il prodotto 3×10 de' termini estremi, eguaglia l'altro 5×6 de' termini medii.

In conseguenza di ciò una proporzione qualunque $3 : 5 :: 6 : 10$ continuerà a sussistere, malgrado che si cambi in molte maniere il luogo de' suoi termini, purchè i cambiamenti siano tali che si conservi sempre il prodotto degli estremi eguale a quello de' medii. I cambiamenti che possono operarsi sono i seguenti,

$$\begin{array}{l} 3 : 6 :: 5 : 10 \\ 5 : 3 :: 10 : 6 \\ 5 : 10 :: 3 : 6 \\ 10 : 5 :: 6 : 3 \\ 10 : 6 :: 5 : 3 \\ 6 : 10 :: 3 : 5 \\ 6 : 3 :: 10 : 5 \end{array}$$

Tutte queste proporzioni sono esatte, poichè in esse i termini estremi si sono mantenuti sempre insieme nei luoghi estremi o ne' luoghi medii, e così pure i termini medii. Ma se si scrivesse

$$6 : 3 :: 5 : 10,$$

questa disposizione di termini sarebbe erranea, perchè 6×5 non è eguale a 3×10 .

Fra i varii cambiamenti che possono effettuarsi, quello che dà origine alla prima delle sette precedenti proporzioni cioè, $3:6::5:10$, consiste nell'alternare il luogo de' termini medii nella proporzione primitiva $3:5::6:10$, e si chiama *permutare* la proporzione; e l'altro cambiamento che dà origine alla seconda proporzione, $5:3::10:6$, consiste nel porre gli antecedenti in luogo dei conseguenti e viceversa, e dicesi *invertire* la proporzione. Le ragioni $5:3$, e $10:6$ si dicono *inverse* o *reciproche* delle loro corrispondenti $3:5$, e $6:10$.

Analogamente, due quantità diconsi in ragione inversa di due altre quando la ragione *diretta* delle prime è eguale alla *inversa* delle seconde, cioè quando la prima *sta* alla seconda *come* la quarta *sta* alla terza. Così 3 *sta a* 5 in ragione inversa di 10 *a* 6 . Secondo questo principio, *due frazioni che hanno lo stesso numeratore stanno fra loro in ragione inversa de' denominatori*. In fatti due frazioni $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}$ che hanno il medesimo numeratore 4 , ridotte allo stesso denominatore stanno fra loro come i numeratori delle nuove frazioni (§. 54, II) cioè, $\frac{4}{5} : \frac{4}{7} :: 4 \times 7 : 4 \times 5$, e questa proporzione, dividendo i termini della seconda ragione per 4 , si cambia nell'altra, $\frac{4}{5} : \frac{4}{7} :: 7 : 5$; vale a dire che la prima frazione sta alla seconda come il denominatore della seconda sta a quello della prima. Se le due frazioni avessero per numeratore comune l'unità sarebbe $\frac{1}{5} : \frac{1}{7} :: 7 : 5$; onde si può conchiudere che *la ragione di due numeri qualunque (7, 5) è inversa, o sia reciproca, della ragione di due frazioni ($\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$), che hanno per numeratore comune l'unità e per denominatori rispettivi gli stessi numeri*. Per questo motivo le frazioni $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$ diconsi *reciproche* de' numeri 7 , 5 ; e similmente una frazione qualunque $\frac{a}{b}$ si chiama *reciproca* della sua rovesciata $\frac{b}{a}$, perchè può

mettersi sotto la forma $\frac{1}{\frac{b}{a}}$.

§. 57.

Non si altera una proporzione se si moltiplicano o si dividono i suoi antecedenti, o i suoi conseguenti per un medesimo numero.

Sia data la proporzione

$$4:6::2:3$$

di cui gli antecedenti sono 4 , e 2 , ed i conseguenti, 6 , e 3 . Permutiamola ed avremo, (§. 56).

$$4:a::6:3.$$

In questa proporzione potremo moltiplicare o dividere per un medesimo numero i termini della prima ragione $4:2$, oppure quelli della seconda ragione $6:3$, senza che esse ne rimangano alterate (§. 54, II); e perciò moltiplichiamo, e dividiamo successivamente i

termini della prima ragione per 2, e quelli della seconda ragione per 3, ed avremo le quattro seguenti proporzioni,

$$\begin{array}{l} 4 \times 2 : 2 \times 2 :: 6 : 3, \text{ ovvero } 8 : 4 :: 6 : 3 \\ \frac{4}{2} : \frac{2}{2} :: 6 : 3 \dots\dots\dots 2 : 1 :: 6 : 3 \\ 4 : 2 :: 6 \times 3 : 3 \times 3 \dots\dots\dots 4 : 2 :: 18 : 9 \\ 4 : 2 :: \frac{6}{3} : \frac{3}{3} \dots\dots\dots 4 : 2 :: 2 : 1 \end{array}$$

le quali permutate si cambiano nelle altre,

$$\begin{array}{l} 4 \times 2 : 6 :: 2 \times 2 : 3, \text{ ovvero } 8 : 6 :: 4 : 3 \\ \frac{4}{2} : 6 :: \frac{2}{2} : 3 \dots\dots\dots 2 : 6 :: 1 : 3 \\ 4 : 6 \times 3 :: 2 : 3 \times 3 \dots\dots\dots 4 : 18 :: 2 : 9 \\ 4 : \frac{6}{3} :: 2 : \frac{3}{3} \dots\dots\dots 4 : 2 :: 2 : 1 \end{array}$$

Queste quattro proporzioni di cui l'esattezza è provata dall'esattezza del ragionamento che ad esse ci ha guidato, non sono altro che la proporzione primitiva $4:6::2:3$, nella quale gli antecedenti sono stati moltiplicati o divisi per 2, ed i conseguenti sono stati moltiplicati o divisi per 3. Rimane dunque dimostrata la proposizione enunciata.

§. 58.

Se due proporzioni hanno una ragione di comune, le due rimanenti ragioni sono eguali fra di loro.

Siano le due proporzioni,

$$\begin{array}{l} 8:6 :: 4:3 \\ 8:6 :: 12:9 \end{array}$$

le quali hanno di comune la ragione 8:6, deve dimostrarsi che le due ragioni 4:3, e 12:9 sono eguali fra loro, ossia che $4:3 :: 12:9$. Questa verità è evidente per se stessa, poichè dalle proporzioni date si desume che ciascuna delle due ragioni 4:3, e 12:9, è la stessa cosa della ragione 8:6; e quindi *due ragioni eguali ad una medesima ragione sono eguali fra loro*. Ricaviamone una conseguenza importante.

Consideriamo le due proporzioni

$$\begin{array}{l} 3:2 :: 6:4 \\ 3:5 :: 6:10 \end{array}$$

le quali hanno gli stessi antecedenti 3, e 6. Permutandole, avremo le altre due proporzioni,

$$\begin{array}{l} 3:6 :: 2:4 \\ 3:6 :: 5:10 \end{array}$$

che hanno una ragione 3:6 di comune, per cui sarà $2:4 :: 5:10$. Ma questi quattro numeri sono i conseguenti delle prime due proporzioni, dunque *se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti di esse sono in proporzione*.

Similmente si dimostrerebbe che, *se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti delle medesime sono in proporzione*.

Se le due proporzioni avessero gli stessi termini *estremi* come, $4:3::8:6$, $4:2::12:6$, è chiaro che il prodotto 3×8 de' primi due *medi* sarebbe eguale a quello 2×12 degli altri due, dalla quale eguaglianza si ricaverebbo $3:2::12:8$; e quindi *se due proporzioni hanno gli stessi termini estremi, i conseguenti delle loro prime ragioni sono in ragione inversa degli antecedenti delle seconde*. Ed allo stesso modo, *se due proporzioni avranno gli stessi termini medi, gli antecedenti delle loro prime ragioni saranno in ragione inversa de' conseguenti delle seconde*.

§. 59.

Da ogni proporzione geometrica, componendo o dividendo, si ottiene un'altra proporzione.

Sia data la proporzione

$$8:6::12:9;$$

mettiamo le due ragioni $8:6$, e $12:9$ sotto forma di frazioni ed avremo,

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9}$$

Or è chiaro che l'eguaglianza di queste due frazioni non si altera, se tanto all'una che all'altra aggiungiamo l'unità; sarà dunque,

$$1 + \frac{8}{6} = 1 + \frac{12}{9},$$

e riducendo l'intero e frazione ad una sola frazione, si avrà

$$\frac{6+8}{6} = \frac{9+12}{9},$$

Rimettiamo in proporzione queste due ragioni espresse sotto forma di frazioni, ed avremo,

$$6+8:6::9+12:9$$

È facile osservare in qual modo questa proporzione è formata per mezzo de' quattro numeri componenti la proporzione primitiva $8:6::12:9$, per cui si può dire in generale che, *in una proporzione qualunque, $8:6::12:9$, la somma de' due primi termini sta al secondo, come la somma de' due ultimi termini sta al quarto*.

Inoltre le due proporzioni

$$6+8:6::9+12:9$$

$$8:6::12:9$$

hanno gli stessi conseguenti, onde i loro antecedenti sono in proporzione, (§. 58), cioè

$$6+8:9+12::8:12; \text{ e permutando,}$$

$$6+8:8::9+12:12.$$

Quindi *in una proporzione qualunque, $8:6::12:9$, la somma de' due primi termini sta al primo termine, come la somma de' due ultimi termini sta al terzo termine*.

Per brevità di linguaggio, si è convenuto d'indicare con la semplice parola *componendo* l'operazione che si esegue sulla proporzione data $8:6::12:9$ per derivarne una delle altre due

$6+8:6::9+12:9$, $6+8:8::9+12:12$
ora dimostrate; onde le proprietà che esse esprimono possono più brevemente enunciarsi, dicendo; *da ogni proporzione geometrica, componendo, si ottiene un'altra proporzione.*

Riprendiamo la proporzione

$$8:6::12:9,$$

e l'egualianza corrispondente,

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9};$$

ed invece di aggiungere l'unità a ciascuna delle due frazioni eguali $\frac{8}{6}$, e $\frac{12}{9}$, togliamola: sarà,

$$\frac{8}{6} - 1 = \frac{12}{9} - 1.$$

Mettiamo l'unità sotto forma di frazione, ed avremo,

$$\frac{8}{6} - \frac{6}{6} = \frac{12}{9} - \frac{9}{9};$$

eseguendo la sottrazione delle frazioni, sarà

$$\frac{8-6}{6} = \frac{12-9}{9}.$$

la quale egualianza messa in aspetto di proporzione darà,

$$8-6:6::12-9:9.$$

Questa proporzione e l'altra,

$$8:6::12:9$$

hanno gli stessi conseguenti, per cui i loro antecedenti sono proporzionali, cioè,

$$8-6:12-9::8:12;$$

e permutando sarà,

$$8-6:8::12-9:12$$

Rimangono dunque dimostrate le due nuove proporzioni,

$$8-6:8::12-9:12$$

$$8-6:6::12-9:9$$

le quali si compongono per mezzo de' termini della proporzione primitiva $8:6::12:9$ in un modo evidente, e dimostrano che, *in una proporzione geometrica qualunque la differenza de' due primi termini sta al primo o al secondo termine, come la differenza degli altri due termini sta al terzo o al quarto termine.* Ed essendosi convenuto di esprimere con la parola *dividendo* l'operazione che dà origine ad una delle due precedenti proporzioni, si potrà dire più brevemente che, *da una proporzione geometrica, qualunque, dividendo, si ottiene un'altra proporzione (*)*.

(*) I geometri antichi chiamavano *composizione* di ragione, o *componendo*, il paragone della somma dei due termini di una ragione al conseguente, *divisione* di ragione, o *dividendo*, il paragone della differenza de' due termini al conseguente, e *conversione* di ragione, o *convertendo*, il paragone della indicata differenza all'antecedente. Le distinzioni usate qui sopra sono più proprie e più com.

Dalle quattro proporzioni,

$$8 + 6 : 8 :: 12 + 9 : 12$$

$$8 + 6 : 6 :: 12 + 9 : 9$$

$$8 - 6 : 8 :: 12 - 9 : 12$$

$$8 - 6 : 6 :: 12 - 9 : 9,$$

possono desumersi due altre importanti conseguenze. Permutiamole, ed avremo le altre quattro,

$$8 + 6 : 12 + 9 :: 8 : 12$$

$$8 + 6 : 12 + 9 :: 6 : 9$$

$$8 - 6 : 12 - 9 :: 8 : 12$$

$$8 - 6 : 12 - 9 :: 6 : 9;$$

le quali considerate come composte per mezzo de' termini della proporzione primitiva $8 : 6 :: 12 : 9$, dimostrano che, *in una proporzione geometrica qualunque, la somma o la differenza de' due primi termini, sta alla somma o alla differenza degli altri due termini, come il primo al secondo antecedente, o come il primo al secondo conseguente.*

Infine, tra le ultime quattro proporzioni, la prima e la terza hanno una ragione di comune, per cui le due rimanenti ragioni sono eguali fra loro, cioè

$$8 + 6 : 12 + 9 :: 8 - 6 : 12 - 9,$$

e permutando si ha,

$$8 + 6 : 8 - 6 :: 12 + 9 : 12 - 9.$$

Dunque *in una proporzione geometrica qualunque, $8 : 6 :: 12 : 9$, la somma de' due primi termini sta alla loro differenza, come la somma degli altri due termini sta alla differenza de' medesimi.*

§. 60.

La somma o la differenza degli antecedenti di una proporzione, sta rispettivamente alla somma o alla differenza de' conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente.

Sia data la proporzione

$$8 : 6 :: 12 : 9;$$

deve dimostrarsi che,

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 8 : 6, \text{ e}$$

$$12 - 8 : 9 - 6 :: 8 : 6.$$

Permutiamo la proporzione proposta ed avremo,

$$8 : 12 :: 6 : 9.$$

Ma si è dimostrato nel §. precedente che la somma o la differenza de' termini del primo rapporto sta alla somma o alla differenza dei termini del secondo rapporto, come il primo al secondo antecedente; dunque applicando questa proprietà alla proporzione permutata $8 : 12 :: 6 : 9$, si avrà

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 8 : 6, \text{ e}$$

$$12 - 8 : 9 - 6 :: 8 : 6$$

che sono appunto le proporzioni che dovevano dimostrarsi.

Da queste due proporzioni che hanno una ragione di comune risulta pure che

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 12 - 8 : 9 - 6$$

e permutando,

$$12 + 8 : 12 - 8 :: 9 + 6 : 9 - 6,$$

cioè, in una proporzione qualunque $8 : 6 :: 12 : 9$, la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla differenza de' medesimi.

§. 61.

Se si ha una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come un antecedente al suo conseguente.

Siano i rapporti eguali

$$8 : 6, 12 : 9, 20 : 15,$$

deve dimostrarsi che

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 8 : 6.$$

Consideriamo prima i due rapporti eguali, $8 : 6$, e $12 : 9$, ed avremo la proporzione $8 : 6 :: 12 : 9$, nella quale, per ciò che si è detto di sopra, sarà

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 8 : 6;$$

ma essendo i rapporti $8 : 6$, e $20 : 15$ eguali fra loro, può scriversi uno in luogo dell'altro, dunque sarà,

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 20 : 15.$$

Applicando a quest'ultima proporzione la stessa proprietà che la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente si avrà,

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 20 : 15,$$

ovvero, sostituendo al rapporto $20 : 15$ uno degli altri due rapporti eguali, $8 : 6$, e $12 : 9$, sarà pure

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 8 : 6, \text{ ed}$$

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 12 : 9;$$

e rimane così dimostrata la proposizione enunciata.

Le tre ultime proporzioni possono anche scriversi più brevemente così,

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 8 : 6 :: 12 : 9 :: 20 : 15,$$

ed allo stesso modo si scrive una serie qualunque di rapporti eguali.

Moltiplicando fra loro o dividendo uno per l'altro i termini corrispondenti di due proporzioni, i prodotti o i quozienti saranno anche in proporzione.

Siano le due proporzioni

$$\begin{array}{l} 4 : 3 :: 8 : 6 \\ 2 : 5 :: 4 : 10 ; \end{array}$$

deve dimostrarsi che

$$4 \times 2 : 3 \times 5 :: 8 \times 4 : 6 \times 10, \text{ e } \frac{4}{3} : \frac{2}{5} :: \frac{8}{6} : \frac{4}{10}.$$

Si pongano le due proporzioni proposte sotto forma di eguaglianze, e si avrà

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}, \quad \frac{2}{5} = \frac{4}{10};$$

ma essendo le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$ equivalenti rispettivamente alle altre $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$, il prodotto delle prime deve anche eguagliare il prodotto delle seconde, dunque sarà

$$\frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{6} \times \frac{4}{10}; \text{ ovvero } \frac{4 \times 2}{3 \times 5} = \frac{8 \times 4}{6 \times 10};$$

alla quale ultima eguaglianza dato l'aspetto di proporzione, si ottiene

$$4 \times 2 : 3 \times 5 :: 8 \times 4 : 6 \times 10$$

Similmente, se in vece di moltiplicare fra loro le due frazioni $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$ si dividerà una per l'altra, e lo stesso si faccia con le loro equivalenti $\frac{8}{6}$, $\frac{4}{10}$ si avrà,

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{8}{6}}{\frac{4}{10}}, \text{ ovvero } (\S. 31) \frac{4 \times 5}{3 \times 2} = \frac{8 \times 10}{6 \times 4};$$

ma l'espressione $\frac{4 \times 5}{3 \times 2}$ può anche considerarsi come il quoziente della

divisione di $\frac{4}{3}$ per $\frac{2}{5}$, e similmente $\frac{8 \times 10}{6 \times 4}$ può rappresentare il quoziente di $\frac{8}{6}$ per $\frac{4}{10}$, dunque si otterrà,

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{8}{6}}{\frac{4}{10}},$$

la quale eguaglianza corrisponde alla seconda proporzione che doveva dimostrarsi, cioè

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{5} :: \frac{8}{6} : \frac{4}{10}.$$

L'operazione di moltiplicare fra loro i termini corrispondenti delle date proporzioni conduce evidentemente allo stesso risultamento an-

che quando le proporzioni sono più di due, cioè i prodotti sono sempre in proporzione. Così le tre proporzioni,

$$4:3::8:6, 2:5::4:10, 3:4::9:12$$

danno origine alla quarta, $24:60::288:720$, della quale ogni termine è il prodotto de' termini corrispondenti nelle prime tre. È notevole che ciascuna delle ragioni $24:60$, $288:720$ equivale alla ragione semplicissima $2:5$, che corrisponde alla frazione $\frac{2}{5}$, espressione più semplice di $\frac{24}{60}$, non meno che di $\frac{288}{720}$; dimodochè la proporzione $24:60::288:720$ potrebbe esser supplita dall'altra $2:5::2:5$. In generale, una proporzione essendo l'eguaglianza di due frazioni, quando queste si riducono ai loro minimi termini, deve cambiarsi necessariamente in una identità.

Se si avessero due o tre proporzioni co' termini rispettivamente eguali, moltiplicandoli fra loro, i prodotti, per ciò che precede, risulterebbero anche proporzionali; ma i termini della proporzione così composta sarebbero i quadrati o i cubi de' corrispondenti termini di ognuna delle proporzioni primitive, dunque si può concludere che, se quattro grandezze sono proporzionali, per esempio $4:3::8:6$, i loro quadrati, o i loro cubi saranno anche in proporzione; cioè

$$4^2:3^2::8^2:6^2, \text{ e } 4^3:3^3::8^3:6^3.$$

§. 63.

Se quattro grandezze sono proporzionali, le loro radici quadrate o cubiche sono anche in proporzione.

Sia la proporzione $16:9::64:36$, ovvero $\frac{16}{9} = \frac{64}{36}$. Poichè le due frazioni $\frac{16}{9}$, $\frac{64}{36}$ sono eguali, saranno eguali ancora le loro radici quadrate,

e però $\sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{64}{36}}$; ma la radice quadrata si estrae da una frazione

estraendola dal numeratore e dal denominatore (pag. 98), dunque $\sqrt{\frac{16}{9}}$ è la stessa cosa di $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$, o similmente $\sqrt{\frac{64}{36}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{36}}$; e quindi $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{36}}$ cioè cambiando l'eguaglianza in proporzione,

$$\sqrt{16}:\sqrt{9}::\sqrt{64}:\sqrt{36}, \text{ ossia } 4:3::8:6.$$

Lo stesso ragionamento si applicherebbe alle radici cubiche.

Allorchè le quantità componenti la proporzione primitiva non sono quadrati o cubi perfetti, le loro radici sono irrazionali, ma deve nulladimeno sussistere la loro proporzionalità per la giustezza del ragionamento che ad essa ci guida. Così se le due frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ sono eguali, dovranno essere eguali ancora le loro radici cubiche, malgrado che non se ne possa assegnare con precisione il valore, cioè dovrà essere $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{6}}$

e quindi $2:\sqrt[3]{9}::4:\sqrt[3]{72}$. Ed è anche da osservarsi che l'esattezza di una proporzione fra quantità irrazionali può spesso verificarsi applicando ad essa

la proprietà dimostrata nel § precedente, poichè elevandone i termini a quadrato o a cubo si può ottenere un'altra proporzione fra quantità razionali.

Nell'esempio attuale, elevando a cubo i termini della proporzione $2 : \sqrt[3]{9} :: 4 : \sqrt[3]{72}$, si perviene alla proporzione fra numeri interi $8 : 9 :: 64 : 72$.

§. 64.

Della ragione composta.

Ragione composta di due o più ragioni si dice quella di cui l'antecedente è il prodotto degli antecedenti di quelle ragioni ed il conseguente è il prodotto de' conseguenti. Nel §. 62 moltiplicando più proporzioni termine per termine ne risultarono due ragioni composte eguali; così la ragione di $24 : 60$ fu composta dalle ragioni $4 : 3$, $2 : 5$, $3 : 4$. Or per indicare che due quantità sono in ragion composta di altre quantità si usa il seguente modo di scrittura,

$$24 : 60 :: (4 : 3) (2 : 5) (3 : 4);$$

e se una ragione, composta di due o più ragioni, è eguale ad un'altra composta di altre ragioni, questa eguaglianza s'indica così,

$$(3 : 6) (8 : 10) :: (4 : 3) (2 : 5) (3 : 4).$$

E poichè ogni rapporto corrisponde ad una frazione, una ragione composta non è se non il prodotto di più frazioni, onde l'eguaglianza di due ragioni composte può anche scriversi così,

$$\frac{3}{6} \times \frac{8}{10} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}.$$

Ponendo la ragion composta sotto questa forma, sarà facile avvertire alcune sue proprietà.

1.^a Se si abbia un qualsivoglia numero di grandezze, la ragione della prima all'ultima sarà composta delle ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza etc. sino all'ultima. Siauo le quantità 2, 7, 3, 4, 5: le ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza etc. potranno esprimersi colle frazioni, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, che moltiplicate fra loro danno $\frac{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4}{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

nella quale espressione sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, si avrà la frazione $\frac{2}{5}$, indicante appunto la ragione della prima all'ultima delle quantità proposte.

2.^a Se tre grandezze siano continuamente proporzionali, la prima avrà alla terza la stessa ragione che il quadrato della prima serba al quadrato della seconda; e se quattro grandezze siano continuamente proporzionali, la ragione della prima alla quarta sarà eguale alla ragione del cubo della prima al cubo della seconda. Questa proprietà è una conseguenza immediata della precedente: infatti se si abbiano le quantità 2, 4, 8, 16, componendo successivamente le loro ragioni sarà, come si è dimostrato,

$$2 : 8 :: (2 : 4) (4 : 8), \text{ e } \\ 2 : 16 :: (2 : 4) (4 : 8) (8 : 16);$$

ma per essere le quantità 2, 4, 8, 16 continuamente proporzionali le ragioni

2:4, 4:8, 8:16 sono eguali fra loro, onde si potrà sostituire la prima a ciascuna delle altre; dunque

$$\left. \begin{array}{l} 2:8::(2:4)(2:4) \\ 2:16::(2:4)(2:4)(2:4) \end{array} \right\} \text{ovvero} \left\{ \begin{array}{l} 2:8::2^2:4^2 \\ 2:16::2^3:4^3 \end{array} \right.$$

La ragione de' quadrati si chiamava dagli antichi geometri *ragion duplicata*, e quella de' cubi *ragion triplicata*; per cui, secondo questo linguaggio, di quattro grandezze continuamente proporzionali la prima sta alla terza in *ragion duplicata* della prima alla seconda, e la prima sta alla quarta in *ragion triplicata* della prima alla seconda.

3.^a La ragione di due frazioni è composta della diretta dei loro numeratori e della inversa de' loro denominatori. Siano le due frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$; riducendole allo stesso denominatore la ragione dell'una all'altra potrà essere espressa da quella de' numeratori delle nuove frazioni (§. 54, II), cioè si avrà,

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{7}::2\times7:3\times5, \text{ ovvero } \frac{2}{3}:\frac{5}{7}::(2:3)(7:5);$$

la quale proporzione esprime la proprietà enunciata.

Da qui risulta ancora che una frazione sta alla sua reciproca come il quadrato del suo numeratore sta al quadrato del suo denominatore. In fatti

$$\frac{2}{3}:\frac{3}{2}::(2:5)(2:5)::2^2:5^2.$$

4.^a Componendo una ragione qualunque con la sua inversa si ha una ragione di uguaglianza; perchè moltiplicando una frazione qualunque $\frac{2}{3}$, per la stessa frazione rovesciata, $\frac{3}{2}$, deve aversi una frazione col numeratore eguale al denominatore, e così pure dovrà accadere se si moltiplichino una frazione, $\frac{2}{3}$, per la sua equivalente rovesciata, $\frac{3}{2}$, cui può darsi l'aspetto di $\frac{5 \times 3}{2 \times 3}$.

In conseguenza di ciò, nella composizione di più ragioni, si potranno omettere per semplicità le ragioni dirette con le loro corrispondenti inverse, le quali non farebbero che complicare inutilmente la ragion composta, introducendo fattori eguali ne' suoi termini. Per esempio la ragione di 288:720 composta delle ragioni 8:6, 4:10, 9:12, si potrà ridurre alla semplice ragione di 4:10, ovvero 2:5 (§. 62), sopprimendo nella composizione le ragioni 8:6, 9:12 inverse una dell'altra.

§. 65.

Della regola del tre.

La teoria delle proporzioni si applica alla risoluzione di molte quistioni, o *problemi* di Aritmetica (*). Per esempio, sapendosi che per comprare 8 palmi di panno si sono spesi 24 ducati, si domanda quanto costeranno 2 palmi dello stesso panno? È chiaro che la metà del numero di palmi di panno costerà la metà del numero di ducati, e similmente la terza parte del numero di palmi di panno costerà la terza parte del numero di ducati etc.; cioè quante volte il primo numero di palmi contiene il secondo, altrettanto il primo numero di ducati dovrà contenere il secondo numero di ducati, che si cerca: ma 8 palmi contiene 2 palmi *quattro* volte, dunque 24 ducati dovrà contenere *quattro* volte il costo di 2 palmi di panno, il quale per conseguenza sarà 6 ducati. Ora, deve riflettersi che i numeri 8, 2, 24, 6 formano una proporzione di cui erano dati i primi tre termini e si è trovato il quarto. Nel §. 52 ancora, applicando ad un caso meno semplice la regola di prendere in parti, si è trovato il quarto termine di una proporzione, allorchè si è calcolato il prodotto di una macchina a vapore in un dato tempo. Ma la risoluzione di simili quistioni non è sempre così facile, e si può dare una regola generale per determinare un termine qualunque di una proporzione quando si conoscono gli altri tre.

L'operazione mediante la quale dati tre termini di una proporzione si trova il quarto, dicesi REGOLA DEL TRE.

Sia la proporzione $5 : 3 :: 10 : x$, in cui la lettera x , posta in luogo del quarto termine, dinota che quel termine non si conosce ancora. Poichè in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' termini medii (§. 55), *5 moltiplicato per x dovrà essere eguale a 3×10 , ovvero*

$$5 \times x = 30.$$

Dunque 30 è eguale al prodotto di 5 per x , ossia 30 è un prodotto di cui si conosce un fattore 5, e si cerca l'altro fattore x .

(*) Si chiama *Problema* una proposizione che esprime una domanda o una quistione da risolversi, e si distingue dal *Teorema* che è una proposizione diretta a dimostrare qualche verità non evidente per se stessa. Per esempio una proposizione così espressa; *ridurre a minimi termini, la frazione $\frac{15}{14}$* , è un problema; e quest'altra, *il prodotto di due frazioni è uguale al prodotto dei numeratori diviso per quello de' denominatori* è un teorema.

Questo fattore si otterrà perciò dalla divisione di 30 per 5, e si avrà

$$x = \frac{30}{5} = 6.$$

E riflettendo che il numero 30 è nato dal prodotto de' numeri 3 e 10, che sono i termini medii della proporzione, e 5 è il termine estremo conosciuto, si conchiuderà che, *quando in una proporzione si cerca uno de' termini estremi, questo termine si ottiene moltiplicando fra loro i due termini medii, e dividendo il prodotto pel termine estremo conosciuto.*

Se fosse incognito un termine medio, come nella proporzione $5:x::10:6$, con un ragionamento simile al precedente si troverebbe,

$$x = \frac{5 \times 6}{10} = 3$$

ossia, *quando si cerca uno de' termini medii, si moltiplicano gli estremi, ed il prodotto si divide pel termine medio conosciuto.*

In una proporzione continua può essere incognito il terzo termine, o pure il termine medio. La ricerca del terzo termine non è diversa da quella del quarto termine di una proporzione qualunque; per esempio, nella proporzione continua $4:3::3:x$ sarà,

$$x = \frac{3 \times 3}{4} = \frac{3^2}{4} = 2\frac{1}{4};$$

ma se si cerca il termine medio, il suo valore dipende da una estrazione di radice quadrata. Così nella proporzione $2:x::x:8$, dovendo il prodotto degli estremi essere eguale a quello de' medii, si avrà $2 \times 8 = x \times x = x^2$; e poichè il quadrato d' x equivale a $2 \times 8 = 16$, sarà $x = \sqrt{16} = 4$. Similmente dalla proporzione $\div 5:x:3$ si ricaverà, $x = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15} = 3,87298...$; ed in generale, *in una proporzione continua il termine medio si ottiene moltiplicando fra loro i termini estremi ed estraendo la radice quadrata dal prodotto ottenuto.* Il termine medio di una proporzione continua si chiama ancora il *medio proporzionale geometrico* fra i termini estremi, per cui si potranno ora intendere facilmente le frasi comunissime di, *medio geometrico* fra due quantità, o *media proporzionale geometrica* fra due quantità. Analogamente, in una proporzione continua $\div 18:6:2$, il terzo termine 2 si chiama il *terzo*, o la *terza proporzionale geometrica in ordine a 18 e 6*; ed in una proporzione qualunque, $5:10::4:8$, il quarto termine 8 dicesi, *il quarto*, o la *quarta proporzionale in ordine a 6, 10 e 4*.

§. 66.

La regola del tre si distingue in diretta ed inversa quando si applica ai problemi di Aritmetica.

Applichiamo la regola del tre a qualche problema.

Un operaio ha fatto 41 canne di lavoro in 5 giorni, si domanda per farne 34 quanto tempo impiegherà? Le quantità indicate nel problema si situeranno come segue,

$$\begin{array}{ll} 41 \text{ canne} & 5 \text{ giorni} \\ 34 \text{ canne} & x \text{ giorni;} \end{array}$$

un termino della prima specie, diminuisce nella proporzione il termine corrispondente della seconda specie, o diminuendo il primo cresce il secondo. Per esempio, 15 operai avendo scavato un fosso in 8 giorni, si domanda 27 operai in quanto tempo scaveranno un fosso eguale? Si situeranno i numeri come segue,

$$15 \text{ operai} \quad 8 \text{ giorni}$$

$$27 \text{ operai} \quad x \text{ giorni}$$

e si rifletterà che crescendo il numero degli operai, deve diminuire il numero de' giorni necessarii per scavare il fosso. Così un numero doppio di lavoratori impiegherà a scavare il fosso la metà del tempo, ossia la metà del numero de' giorni, ed un numero triplo di lavoratori impiegherà la terza parte del numero de' giorni etc.; onde quante volte il numero 27 degli operai contiene il numero 15 degli operai, altrettante volte il numero x de' giorni, corrispondente al 27, dovrà esser contenuto nel numero 8 dei giorni corrispondente al 15, ed x sarà minore di 8 mentre 27 è maggiore di 15. La regola del tre è dunque inversa, e si chiama così perchè la prima ragione di $27 : 15$ è inversa della seconda ragione di $x : 8$ (§. 56), ossia i quattro numeri, 27, 15, x , 8 non possono mettersi in proporzione nell'ordine in cui sono, ma per intavolare la proporzione a norma della regola data qui sopra deve rovesciarsi, o invertirsi la ragione di $x : 8$, e scriversi,

$$27 : 15 :: 8 : x.$$

Per agevolare anche più il modo di stabilire la proporzione nella regola del tre diretta ed inversa osserveremo che, quando la regola è diretta i numeri che nelle due ragioni si corrispondono formano sempre gli antecedenti o i conseguenti della proporzione, o quando la regola è inversa i numeri corrispondenti occupano il luogo de' termini estremi o de' medii. Così nella penultima quistione i numeri 15 canne ed 8 ducati, che si corrispondono, perchè 8 ducati sono il prezzo di 15 canne, formano gli antecedenti della proporzione, mentre nell'ultimo problema gli stessi numeri corrispondenti 15 ed 8, i quali esprimono uomini e giorni, occupano il luogo de' termini medii.

Ed è pure da notarsi che quanto abbiamo detto nei §§. 54 e 56 della ragione diretta ed inversa si accorda esattamente con l'applicazione che si fa di queste denominazioni nella regola del tre. In fatti, due frazioni che hanno lo stesso denominatore stanno fra loro come i numeratori, o in ragion diretta de' numeratori (§. 54, II), per esempio, $\frac{3}{4} : \frac{5}{4} :: 5 : 7$; ed in questa proporzione i numeri corrispondenti $\frac{3}{4}$, 5, o $\frac{5}{4}$, 7 figurano da antecedenti o da conseguenti, e di più, crescendo i numeri 5, 7, crescono i loro corrispondenti $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$ (§. 14) come nella regola del tre diretta. Al contrario due frazioni che hanno lo stesso numeratore sono in ragione inversa de' loro denominatori (§. 56), per esempio $\frac{4}{5} : \frac{4}{7} :: 7 : 5$; e qui i numeri corrispondenti $\frac{4}{5}$, 5 occupano nella proporzione

i luoghi estremi, e gli altri $\frac{4}{7}$, 7 i luoghi medii, ed inoltre, *cre-
scendo* 7, 5 *diminuiscono* i loro corrispondenti $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{7}$ (§. 14), sic-
come avviene nella regola del tre inversa.

Ecco altri esempi.

I. Per coprire un certo mobile con una stoffa larga 4 palmi ce
ne sono abbisognate $7^{\text{can}} 3^{\text{pal}}$; si domanda, $4^{\text{pal}} 7^{\text{can}} 3^{\text{pal}}$
per coprirlo nuovamente con altra stoffa larga $3^{\text{pal}} 4^{\text{can}}$
 $3^{\text{pal}} 4^{\text{can}}$ quanta ce ne vorrà?

Meno larga è la stoffa e *più* ce ne vuole per adempiere allo stesso
oggetto; dunque la regola è inversa, e la proporzione s'intavolerà
come segue

$$3^{\text{pal}} 4^{\text{can}} : 4^{\text{pal}} :: 7^{\text{can}} 3^{\text{pal}} : x, \text{ da cui}$$

$$x = \frac{4^{\text{pal}} \times 7^{\text{can}} 3^{\text{pal}}}{3^{\text{pal}} 4^{\text{can}}}$$

Per calcolare il valore della quantità incognita x bisognerebbe mol-
tiplicare fra loro due lunghezze (§. 49), e noi non abbiamo an-
cora una regola onde eseguire questa operazione; ma si può evitare
la difficoltà riflettendo che il valore d' x può scriversi anche così,
 $\frac{4^{\text{pal}}}{3^{\text{pal}} 4^{\text{can}}} \times 7^{\text{can}} 3^{\text{pal}}$, cioè potrà eseguirsi prima la divisione di 4^{pal} per
 $3^{\text{pal}} 4^{\text{can}}$, e poi moltiplicare il quoziente ottenuto per $7^{\text{can}} 3^{\text{pal}}$. In tal
guisa dalla divisione delle quantità omogenee 4^{pal} , $3^{\text{pal}} 4^{\text{can}}$ si otterrà
il *numero astratto* $1\frac{1}{2}$, che moltiplicato per $7^{\text{can}} 3^{\text{pal}}$ darà,
 $x = 8^{\text{can}} . 6^{\text{pal}} . 9^{\text{can}} . 3^{\text{pal}}$.

II. Un animale da soma ha trasportato in tre quarti d'ora un
dato peso alla distanza di 3000 palmi, si domanda per trasportarlo
alla distanza di 4200 palmi quanto tempo impie- *Distanze* *Ore*
gherà? *Maggiore* è la distanza, *più* tempo è 3000 $\frac{3}{4}$
necessario a percorrerla; la regola è diretta, e 4100 x
si ha,

$$3000 : 4200 :: \frac{3}{4} : x = \frac{42 \times 3}{30 \times 4} = \frac{42}{40} = 1^{\text{or}} . 05.$$

III. Un corpo di 2100 soldati ha consumato nn magazzino di
farina in 12 giorni, si domanda in quanti giorni *Uomini* *Giorni*
una eguale quantità di farina sarà consumata da 2100 12
3600 uomini? La regola è inversa per cui, 3600 x
 $3600 : 2100 :: 12 : x$, ovvero

$$36 : 21 :: 12 : x = \frac{21}{3} = 7 \text{ giorni.}$$

IV. Un vascello non ha viveri che per 15 giorni mentre deve
tenere il mare altre tre settimane; si domanda a che dovrà ridursi
la razione giornaliera di ciascun individuo affinchè bastino i viveri?
Questo problema pare che non presenti se non
due termini della proporzione, ma esprimendo *Giorni* *Razioni*
da 1 la razione ordinaria di un individuo, la 15 1
razione ridotta si otterrà in parti dell'unità, ri- 21 x
flettendo che la regola è inversa, e mediante la proporzione,
 $21 : 15 :: 1 : x$, che darà $x = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$.

Deve in fine avvertirsi che non sempre coi dati di un problema si può formare una proporzione, ma è necessario che le due specie di quantità che si considerano crescano o diminuiscano proporzionalmente. Per esempio il problema II non potrebbe, a rigore, esser risoluto con una proporzione, perchè le forze dell'animale in un lungo tragitto non possono conservarsi sempre le stesse, e la stanchezza proveniente dalla fatica deve ritardare il suo cammino verso la fine del viaggio; onde una distanza doppia non sarà percorsa in un tempo doppio ma in un tempo maggiore. Nulladimeno, quando non vi sia modo da valutare esattamente la legge con la quale crescono o decreseono le quantità che entrano nel problema, il valore risultante dalla proporzione potrà spesso considerarsi approssimato, se non esatto. In qualche caso però potrebbe essere interamente falso; così se un diamante del peso di 7 acini, o *grani*, vale 10 ducati, un altro diamante della stessa qualità e del peso di 14 grani, in vece di valere il doppio, potrebbe valere 50 ducati, perchè il pregio delle pietre preziose dipende dal loro peso non meno che dalla loro rarità, e le pietre più grosse sono di grau lunga più difficili a trovarsi delle mezzane e delle picciole.

§. 67.

Regola del tre composta.

La regola del tre diccsi composta quando il valore della quantità che si cerca non dipende dai soli tre termini di una proporzione, come nella regola del tre semplice, ma da *cinque*, o *sette*, o *nove* etc. quantità, secondo le circostanze. Osserviamolo ne' seguenti problemi.

I. Quattro operai lavorando per 3 giorni, hanno fatto 8 canne di lavoro; si domanda 13 operai in 7 giorni quanto lavoro faranno? Disponansi i numeri come qui appresso,

4 operai	3 giorni	8 canne
13	7	x

e si vedrà subito che in questo problema debbono distinguersi tre ragioni o rapporti, mentre nella regola del tre semplice se ne considerano due soltanto. I tre rapporti sono,

$x : 8$, che è il rapporto della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere,

$13 : 4$ rapporto degli operai,

$7 : 3$ rapporto de' giorni.

Riflettasi ora, che il lavoro x , che si cerca, non dipende soltanto dal numero degli operai, ma dipende anche dal numero dei giorni, perocchè il lavoro cresce evidentemente per due motivi, cioè cresce crescendo il numero degli uomini, e cresce crescendo il tempo che impiegano a travagliare. Per risolvere il problema

consideriamo queste due circostanze separatamente, decomponendo la regola del tre composta in due regole del tre semplici.

Primieramente rimanga lo stesso il numero de' giorni di lavoro, ed allora la quantità di esso dipenderà dal numero degli uomini soltanto, e crescerà crescendo questo numero. In fatti, ritenendo che 4 uomini in tre giorni abbiano fatto 8 canne di lavoro, si cerchi il lavoro di 13 uomini negli stessi tre giorni. Si dispongano i numeri al solito, come qui sotto,

$$\begin{array}{ccc} 4 \text{ uomini} & 3 \text{ giorni} & 8 \text{ canne} \\ 13 & 3 & y \end{array}$$

e si dirà; se 4 uomini in 3 giorni hanno fatto un certo lavoro, 8 uomini *nello stesso tempo* faranno un lavoro doppio, 12 uomini faranno un lavoro triplo, ec.; onde il lavoro è in proporzione del numero degli uomini soltanto. Dunque per trovare il lavoro di 13 uomini ne' tre giorni indicati, si farà la proporzione,

$$4 \text{ uomini} : 13 \text{ uomini} :: 8 \text{ canne} : y = \frac{8 \times 13}{4} \text{ canne}$$

e quindi con supporre lo stesso il numero de' giorni di lavoro, la regola del tre da composta è divenuta semplice, e delle tre ragioni distinte di sopra, è scomparsa appunto la ragione de' giorni che ha i termini eguali.

In secondo luogo rimanga lo stesso il numero degli operai, e si faccia variare il numero de' giorni; la quantità del lavoro dipenderà da questo numero soltanto, e crescerà o diminuirà con esso. Or sapendosi dalla precedente proporzione che 13 uomini in 3 giorni hanno fatto $\frac{8 \times 13}{4}$ canne di lavoro, si cerchi il lavoro che gli stessi 13 uomini faranno in 7 giorni. Le quantità saranno disposte come segue,

$$\begin{array}{ccc} 13 \text{ uomini} & 3 \text{ giorni} & \frac{8 \times 13}{4} \\ 13 & 7 & x \end{array}$$

e si dirà; se 13 uomini in 3 giorni hanno fatto un certo lavoro, lo stesso numero di uomini in 6 giorni farà un lavoro doppio, in 9 giorni farà un lavoro triplo etc., onde il lavoro è in proporzione de' giorni, e per trovare il lavoro fatto dall'indicata compagnia di operai in 7 giorni, si farà la proporzione,

$$3 \text{ giorni} : 7 \text{ giorni} :: \frac{8 \times 13}{4} : x = \frac{8 \times 13 \times 7}{3 \times 4} = 60 \frac{2}{3}$$

E qui ancora, con supporre lo stesso il numero degli operai, si ha una regola del tre semplice, poichè rimane soppressa appunto la ragione degli operai che ha i termini eguali.

Il quarto termine dell'ultima proporzione rappresenta il lavoro di 13 operai in 7 giorni, che è la quantità richiesta nel problema.

È facile mostrare come questa quantità si compone per mezzo

delle quantità date. Moltiplichiamo termine per termine le due precedenti proporzioni,

$$\begin{array}{l} 4 : 13 :: 8 : y \\ 3 : 7 :: y : x, \end{array}$$

e ne risulterà l'altra (§. 62)

$$4 \times 3 : 13 \times 7 :: 8 \times y : y \times x;$$

dalla quale, dividendo i termini della seconda ragione per y , ed invertendo si avrà

$$x : 8 :: 13 \times 7 : 4 \times 3.$$

Ora, essendo i numeri 13, e 7 gli antecedenti delle due ragioni $13:4$, e $7:3$, ed i numeri 4 e 3 i conseguenti delle ragioni medesime, ne segue che la ragione di $x:8$, è composta delle ragioni $13:4$ e $7:3$ (§. 64), che sono quella degli uomini e quella de' giorni. Dunque *nella regola del tre composta la ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere, è composta delle ragioni di tutte le altre quantità che entrano nel problema.*

Deve osservarsi che nel problema precedente la ragione degli uomini non meno che la ragione de' giorni sono *dirette* alla ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere (§. 66). In fatti crescendo il numero degli operai, cresce evidentemente il lavoro che essi fanno, e crescendo il numero de' giorni che impiegano a travagliare, deve anche risultar maggiore il lavoro eseguito. Accade però spesso che qualcheduna delle ragioni che entrano nel problema, sia inversa alla ragione della cosa cercata alla cosa data. Per esempio;

II. Quattro operai hanno fatto 8 canne di lavoro in 3 giorni; si domanda 9 operai per fare 42 canne di lavoro quanto tempo impiegheranno? Si dispongano i numeri come segue,

$$\begin{array}{lll} 4 \text{ operai} & 8 \text{ canne} & 3 \text{ giorni} \\ 9 & 42 & x \end{array}$$

e si osservi che le ragioni che entrano nel problema sono,

$x : 3$ ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere, ossia ragione de' giorni,

$9 : 4$ ragione degli uomini,

$42 : 8$ ragione del lavoro.

Riflettasi inoltre che la ragione degli uomini è inversa alla ragione de' giorni, perchè crescendo il numero degli uomini che travagliano, diminuisce il tempo necessario per fare un certo lavoro; e la ragione del lavoro è diretta a quella de' giorni, poichè crescendo il lavoro, ci vuole maggior tempo per eseguirlo.

Ciò posto, il numero x de' giorni dipende come nel problema precedente tanto dal lavoro da farsi che dal numero degli uomini che devono eseguirlo; ma possono queste due circostanze considerarsi separatamente, supponendo prima che il lavoro rimanga lo stesso, ed indi che rimanga lo stesso il numero degli uomini.

1.° Si proporrà la quistione ,

4 uomini hanno fatto 8 canne in 3 giorni

9 uomini per fare 8 canne quanti giorni impiegheranno?

E per trovare il numero de' giorni che si cerca , si rifletterà che se 4 uomini hanno fatto un certo lavoro in 3 giorni , 8 uomini faranno lo stesso lavoro nella metà del tempo , 12 uomini lo faranno nel terzo del tempo ec., onde il numero dei giorni è inversamente proporzionale a quello degli uomini , e si avrà ,

$$9 : 4 :: 3 : y = \frac{3 \times 4}{9}$$

2.° Si proporrà l'altra quistione ,

9 uomini hanno fatto 8 canne in $\frac{3 \times 4}{9}$ giorni

9 uomini per fare 42 canne quanti giorni impiegheranno?

Per trovare il numero dei giorni che si cerca , si osserverà che lo stesso numero di uomini deve impiegare maggior tempo a fare un maggior lavoro , onde il numero de' giorni sarà proporzionale direttamente al numero delle canne , e si avrà ,

$$8 : 42 :: \frac{3 \times 4}{9} : x = \frac{3 \times 4 \times 42}{9 \times 8} = 7$$

Questo valore d' x esprime il numero dei giorni che impiegheranno 9 uomini a fare 42 canne di lavoro , che è ciò che si domandava ; e quindi il problema proposto rimane risoluto con due regole del tre semplici una inversa e l'altra diretta.

Moltiplicando , come sopra , termine per termine le due precedenti proporzioni , si avrà

$$9 \times 8 : 4 \times 42 :: 3 \times y : y \times x ,$$

e dividendo i termini della seconda ragione per y ed invertendo , sarà

$$x : 3 :: 42 \times 4 : 8 \times 9 ;$$

cioè la ragione di $x : 3$ è eguale alla ragione di $42 \times 4 : 8 \times 9$, composta delle ragioni $42 : 8$, e $4 : 9$. Dunque anche in questo problema la ragione della cosa cercata alla cosa data , è composta delle ragioni di tutte le altre quantità che entrano nel problema ; se non che la ragione degli uomini essendo inversa a quella de' giorni , invece d'introdurre nella composizione delle ragioni , la ragione $9 : 4$, si è adoperata la sua inversa $4 : 9$.

Tutto ciò premesso , si può dare una regola generale per risolvere qualunque problema dello stesso genere de' due precedenti. Eccola.

1.° *Situate le quantità che entrano nel problema in due linee orizzontali , scrivendo quelle della stessa specie le une sotto le altre.*

2.° *Esaminate le ragioni delle diverse quantità che entrano nel problema , osservando quali sono dirette , e quali inverse alla ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere.*

3.^o *Scrivete le ragioni dirette nell'ordine in cui sono, e le ragioni inverse scrivetele, invertendone i termini.*

4.^o *La ragione della cosa cercata alla cosa data sarà composta di tutte le altre ragioni, e perciò stabilite la seguente proporzione, che risolverà il problema.*

La cosa cercata sta alla cosa data dello stesso genere, come il prodotto di tutti gli antecedenti delle altre ragioni, sta al prodotto di tutti i conseguenti. Applichiamo questa regola a qualche altra quistione.

III. Quattro mortai sparando per 3 ore al giorno hanno gettato 1000 bombe in una fortezza, nello spazio di 7 giorni; si domanda, 6 mortai sparando per 2 ore al giorno, per gettare 1500 bombe quanti giorni dovranno impiegare?

1.^o Scriviamo le quantità secondo la regola

$$\begin{array}{ccccccc} 4 \text{ mortai} & 3 \text{ ore} & 1000 \text{ bombe} & 7 \text{ giorni} \\ 6 & 2 & 1500 & x \end{array}$$

2.^o Esaminiamo le ragioni delle quantità che entrano nel problema.

Questo esame sarà facilissimo quando nel quadro precedente che contiene tutte le quantità che entrano nel problema, si abbia l'avvertenza di supporre eguali tutti i numeri della stessa specie, all'infuori de' termini della ragione che si esamina, e della ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere. Così per esaminare la ragione de' mortai la supposizione sarà,

$$\begin{array}{ccccccc} 4 \text{ mortai} & 3 \text{ ore} & 1000 \text{ bombe} & 7 \text{ giorni} \\ 6 & 3 & 1000 & x \end{array}$$

e si dirà; più mortai si adoperano, e meno giorni vi bisognano per gettare una stessa quantità di bombe, sparando un egual numero di ore al giorno. Dunque la ragione de' mortai è inversa a quella de' giorni, ossia alla ragione della cosa cercata alla cosa data.

Per la ragione delle ore la supposizione sarà,

$$\begin{array}{ccccccc} 4 \text{ mortai} & 3 \text{ ore} & 1000 \text{ bombe} & 7 \text{ giorni} \\ 4 & 2 & 1000 & x \end{array}$$

e si dirà: meno ore al giorno sparano i mortai, ed impiegheranno maggior numero di giorni a gettare la stessa quantità di bombe. Dunque la ragione delle ore è inversa.

Per la ragione delle bombe la supposizione sarà,

$$\begin{array}{ccccccc} 4 \text{ mortai} & 3 \text{ ore} & 1000 \text{ bombe} & 7 \text{ giorni} \\ 4 & 3 & 1500 & x \end{array}$$

e si dirà; più bombe devono gettarsi, e maggior numero di giorni ci vuole, per uno stesso numero di mortai, che sparino un egual numero di ore al giorno. Dunque la ragione delle bombe è diretta.

È inutile avvertire che nell'esaminare le ragioni non è necessario scrivere ogni volta il quadro delle quantità che si considerano, come abbiamo fatto qui sopra a solo oggetto di agevolare ai giovani l'intelligenza di una teoria, che suol presentare qualche difficoltà.

3.° Scriviamo le ragioni

<i>Ragione della cosa cercata alla cosa data . .</i>	$x : 7$
<i>Ragione inversa de' mortai</i>	$4 : 6$
<i>Ragione inversa delle ore</i>	$3 : 2$
<i>Ragione diretta delle bombe</i>	$1500 : 1000$

4.° Stabiliamo la proporzione secondo la regola, ed avremo

$$x : 7 :: 4 \times 3 \times 1500 : 6 \times 2 \times 1000$$

da cui si ricava,

$$x = \frac{7 \times 4 \times 3 \times 1500}{6 \times 2 \times 1000} = \frac{7 \times 2.2 \times 3 \times 3.500}{2.3 \times 2 \times 2.500}$$

e sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore (§. 28), si avrà

$$x = \frac{7 \cdot 3}{2} = 10 \frac{1}{2}.$$

Nell'esempio attuale il calcolo per trovare il valore d' x poteva esser più breve, riflettendo che fra le ragioni componenti la ragione $x : 7$, le due $4 : 6$, $3 : 2$ sono inverse una dell'altra, e quindi possono tralasciarsi nella composizione (§. 64). Così si avrebbe immediatamente,

$$x : 7 :: 1500 : 1000 :: 3 : 2, \text{ ed } x = \frac{7 \cdot 3}{2} = 10 \frac{1}{2}.$$

IV. Sapendosi che una cisterna lunga 20 palmi, larga 18 palmi e profonda 15 palmi può contenere 192 botti d'acqua, si domanda di quante botti sarà capace un'altra cisterna lunga 25 palmi, larga 16 palmi e profonda 17 palmi?

Le quantità, scritte secondo la regola sono

<i>lunghezze</i>	<i>larghezze</i>	<i>profondità</i>	<i>botti d'acqua</i>
20	18	15	192
25	16	17	x

Più lunga è una cisterna, e più acqua contiene in confronto di un'altra che abbia la stessa larghezza e la stessa profondità; la ragione delle lunghezze è dunque diretta.

Meno larga è una cisterna e meno acqua contiene, paragonata ad un'altra di eguale lunghezza ed eguale profondità; la ragione delle larghezze è diretta.

Più profonda è una cisterna, e contiene più acqua di un'altra della stessa lunghezza e della medesima larghezza; la ragione delle profondità è diretta.

Le ragioni, discusse ed ordinate, sono perciò,

$$x : 192, 25 : 20, 16 : 18, 17 : 15, \text{ e quindi}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{192 \times 25 \times 16 \times 17}{20 \times 18 \times 15} = \frac{192 \times 5.5 \times 4.4 \times 17}{4.5 \times 2.9 \times 3.5} \\ &= \frac{2.3.32 \times 4.17}{2.9.3} = \frac{32.4.17}{9} = 241 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Le capacità di due cisterne sono dunque in ragion composta delle loro lunghezze, larghezze e profondità, cioè la capacità di una sta alla capacità

dell'altra come il prodotto delle tre *dimensioni* della prima (lunghezza, larghezza e profondità) al prodotto delle tre dimensioni della seconda. Lo stesso accade per due casse, per due vasche, per due canali, ed in generale per due recipienti i quali abbiano una forma diritta e regolare simile a quella delle cisterne, e propriamente la forma detta *parallelepipeda rettangola*; dimodochè se si abbia un recipiente così fatto lungo 8 palmi, largo 5 e profondo 4, ed un altro lungo 1 palmo, largo 1 palmo e profondo 1 palmo, il rapporto della capacità del primo alla capacità del secondo sarà quello de' prodotti $8 \times 5 \times 4$, $1 \times 1 \times 1$, cioè $160 : 1$. E considerando il primo recipiente misurato per mezzo del secondo preso per unità, (§. 54, III) il numero 160 basterà a rappresentarne la capacità. È evidente altresì che la capacità di un terzo vaso lungo 4 palmi, largo 2 e profondo 3 sarà similmente espressa dal numero $4 \times 2 \times 3 = 24$; cioè questo terzo vaso conterrà 24 volte la capacità del vaso più piccolo, che sarà la *comune misura* de' primi due, e più generalmente potrà considerarsi come l'*unità di misura* con la quale si valuteranno le capacità di tutti i recipienti le cui tre dimensioni sono espresse in palmi. Il vaso, o volume *parallelepipedo* che ha ciascuna delle sue tre dimensioni eguali ad un palmo, e può servir di *unità di misura* delle capacità o de' volumi, si chiama *palmò cubico*, perchè la sua capacità risulta dal prodotto di un palmo moltiplicato due volte per se stesso, cioè da $1 \times 1 \times 1$, come si è veduto qui sopra. Adottando questo *modulo* generale, le capacità delle indicate due cisterne sarebbero espresse da $20 \times 18 \times 15 = 5400$ *palmi cubici*, e da $25 \times 16 \times 17 = 6800$ *palmi cubici*.

Con un ragionamento affatto simile sarà facile persuadersi che l'estensione in lunghezza e larghezza, o come suol dirsi, l'estensione *superficiale*, o l'ampiezza, di una tavola, del pavimento di una stanza, di un giardino, ed in generale di un oggetto qualunque che abbia la forma detta *rettangolare*, è in ragion composta della lunghezza e della larghezza. Così se un pezzo di tela è lungo 4 palmi e largo 3, ed un altro è lungo 6 palmi e largo 2, il rapporto di estensione od ampiezza del primo al secondo sarà quello de' prodotti 4×3 , 6×2 , ovvero di $12 : 12$; cioè i due pezzi di tela saranno eguali, e ciascuno di essi serberà ad un terzo pezzo di tela lungo 1 palmo e largo 1 palmo lo stesso rapporto di $12 : 1 \times 1$, ovvero di $12 : 1$. Laonde qui pure si potrà adottare per *unità di misura superficiale* un'estensione o superficie che abbia per lunghezza 1 palmo e per larghezza 1 palmo, la quale dicesi *palmò quadrato*, perchè la sua ampiezza risulta dal prodotto di 1 palmo per 1 palmo quando si paragona ad un'altra. Secondo questa convenzione l'ampiezza o superficie di ciascuno de' due menzionati pezzi di tela sarà espressa da 12 *palmi quadrati*.

Si concepisce facilmente come anche per le semplici *lunghezze* possa stabilirsi una *unità di misura*, per esempio il palmo, il quale prende allora il nome di *palmò lineare* per distinguerlo dal *palmò superficiale* e dal *palmò cubico*, che servono a misurare rispettivamente le superficie ed i volumi; così quando si dice che una strada è lunga 1000 palmi s'intende che la lunghezza della strada è 1000 volte quella del palmo, o sia che la lunghezza della strada sia alla lunghezza del palmo come 1000 ad 1.

Da tutto ciò si può concludere che, *una quantità continua qualunque può sempre esprimersi per mezzo di un numero dinotante il rapporto di quella grandezza alla sua unità di misura*.

Lo studio della *Geometria* può solo giustificare pienamente questa maniera di misurare le quantità *continue*, ma noi abbiamo creduto utile anticiparne qui la conoscenza perchè meglio si comprenda ciò che dovremo dire più innanzi intorno alle *misure*.

Problemi d'interesse.

Qualunque proprietà, che non sia oggetto di comodo o di lusso per uso particolare di chi la possiede, produce un frutto, quando si sa bene amministrare. Così un podere coltivato, una casa affittata danno al proprietario una rendita annuale, o in prodotti effettivi del terreno o in denaro; e similmente il denaro, che per convenzione sociale può rappresentare ogni proprietà, quando è messo in commercio o dato in prestito, produce un guadagno, o un *interesse* durante il tempo che rimane *impiegato*. Nell'uso della proprietà produttiva si considerano perciò tre cose principali; 1.^o la proprietà o la somma di denaro posta a frutto, che si chiama *capitale*, *fondo*, o *sorte principale*; 2.^o la *ragione dell'interesse*, che consiste nel rapporto tra il frutto ed il capitale da cui deriva in un anno, 3.^o l'*interesse* o il frutto del capitale alla fine di un tempo determinato. La ragione dell'interesse si stabilisce ordinariamente prendendo per capitale elementare o di paragone il numero 100; per esempio, quando si dice che un capitale di 2000 ducati è stato impiegato alla ragione del 6 per 100 l'anno, s'intende essersi convenuto che il frutto del fondo di ducati 2000 alla fine di ciascun anno debba calcolarsi rispetto al capitale nella ragione di 6:100, cioè come l'interesse di 6 ducati annui relativamente al capitale di 100 ducati. Il frutto o l'interesse di un capitale qualunque per un anno si chiama *rendita*.

Tutto ciò premesso, il *capitale*, la *ragione dell'interesse* e la *rendita* sono tre cose delle quali due essendo conosciute, si può trovare la terza, come segue.

I. *Sono dati il capitale e la ragione dell'interesse, e si cerca la rendita.* Sia il capitale di 2450 ducati impiegato alla ragione del 6 per 100; per ciò che si è detto di sopra, la rendita o frutto annuale si otterrà dal quarto termine della proporzione

$100 : 6 :: 2450 : x = 2450 \times \frac{6}{100} = 2450 \times 0,06 = 147$; e poichè la ragione dell'interesse è $\frac{6}{100}$ si potrà stabilire la regola che, *per trovare la rendita di un dato capitale, basta moltiplicarlo per la ragione dell'interesse*. Così la rendita di 4524 ducati al $3\frac{1}{2}$ per 100 è $4524 \times \frac{3\frac{1}{2}}{100} = 158,34$.

II. *È data la rendita e la ragione dell'interesse; si cerca il capitale.* Siccome la rendita è il prodotto del capitale per la ragione dell'interesse, dividendola per uno de' suoi fattori se ne potrà ricavare l'altro fattore. Nel caso attuale *la rendita divisa per la ragione dell'interesse darà il capitale*. Per esempio, il capitale che ha fruttato una rendita di 147 ducati alla ragione del 6 per 100 si ottiene da $\frac{147}{0,06} = 2450$. Questo risultamento corrisponde anche al termine incognito della proporzione

$$6 : 100 :: 147 : x = 2450.$$

Quando l'interesse si calcola al 5 per 100 il capitale è 20 volte la rendita, poichè dividere un numero qualunque per $\frac{5}{100}$, o sia per $\frac{1}{20}$, vale lo stesso che moltiplicarlo per 20.

E da osservarsi che, dato il capitale, la rendita cresce, crescendo la ragione dell'interesse; e viceversa, data la rendita, il capitale corrispondente è tanto più piccolo quanto maggiore è la ragione dell'interesse.

III. *Dati il capitale e la rendita, si cerca la ragione dell'interesse*; è chiaro che si otterrà *dividendo la rendita pel capitale*. Così se un capitale di 4252 ducati ha prodotto la rendita di 180,71, per sapere a che ragione era impiegato basterà dividere 180,71 per 4252, e si avrà 0,0425; cioè la ragione dell'interesse fu del $4\frac{1}{4}$ per 100. In questo terzo quesito, in vece della ragione dell'interesse, sarebbe più comodo cercare *l'interesse di 100 ducati in un anno, il quale si otterrà moltiplicando la rendita per 100 e dividendola pel capitale*, come risulta dalla proporzione,

$$4252 : 180,71 :: 100 : x = \frac{18071}{4252} = 4\frac{1}{4}.$$

In generale è utile osservare che la proporzione,

100 sta al suo interesse in un anno, come un capitale qualunque sta alla sua rendita,

può servire a risolvere tutti i tre problemi precedenti, secondochè in essa si consideri incognito il *quarto*, il *terzo*, o il *secondo* termine.

Ma questa proporzione non basta sola a risolvere i problemi d'interesse quando in vece della rendita si considera il frutto o l'interesse del capitale in un tempo maggiore o minore di un anno. In tal caso, oltre alla proporzione precedente, converrà far uso anche di quella che segue, in cui si tien conto della variazione del tempo;

Un anno sta al dato tempo, come la rendita sta all'interesse corrispondente al tempo medesimo.

Facciamone l'applicazione.

IV. *Trovare il frutto del capitale di 2450 ducati impiegato per 17 mesi ed 8 giorni alla ragione del 6 per 100*. Si calcolerà la rendita, o frutto annuale, come nel problema I, indi si farà la proporzione

$$12^{mes} : 17^m 8^g :: 147 : x = 147 \times \frac{17^m 8^g}{12^m}$$

Ma qui, in vece di eseguire la moltiplicazione e la divisione indicate, sarà meglio calcolare il frutto domandato *prendendolo in parti* come a pag. 110;

per 12 mesi	D. ^u 147,00
per 4 mesi la terza parte	49,00
per 1 mese ($\frac{1}{4}$)	12,25
per 6 giorni ($\frac{1}{2}$)	2,45
per 2 giorni ($\frac{1}{3}$)	0,82
per 17 ^m 8 ^g	D. ^u 211,52

V. Si cerca il valore di un capitale che, impiegato alla ragione del 6 per 100, ha fruttato D.^a 211,52 in 17 mesi ed 8 giorni. Per trovare la rendita si stabilirà la proporzione

$$17^m 8^g : 12^m :: 211,52 : x = 211,52 \times \frac{12^m}{17^m 8^g}$$

Prima di determinare il valore d' x si avverte che, per agevolare il calcolo degl'interessi, si è convenuto generalmente doversi considerare un mese, qualunque esso sia, come la dodicesima parte dell'anno, ed un giorno la trentesima parte del mese. In questa supposizione, adottata anche nel problema precedente, $17^m 8^g$ equivalgono a

$$17^m \frac{4}{15} = \frac{259}{15}, \text{ ed } x = \frac{211,52 \times 12 \times 15}{259} = \frac{211,52 \times 180}{259} = 147.$$

Trovata così la rendita, il capitale corrispondente si calcolerà come nel problema II.

VI. A che ragione è stato impiegato il capitale di D.^a 2450, che in $17^m 8^g$ ha dato per frutto D.^a 211,52? Si troverà la rendita con la proporzione,

$$17^m 8^g : 12^m :: 211,52 : x = 211,52 \times \frac{12^m}{17^m 8^g} = 147;$$

dopo di ciò, col capitale e con la rendita si calcolerà la ragione dell'interesse come nel problema III.

VII. Un capitale di 2450 ducati ha dato, al 6 per 100, D.^a 211,52 d'interesse; si domanda quanto tempo è stato impiegato. Si cercherà la rendita come nel problema I, indi si farà la proporzione

$$147 : 211,52 :: 12^m : x = 12^m \times \frac{211,52}{147} = 17^m 8^g$$

De' precedenti problemi gli ultimi quattro potrebbero anche esser risolti colla regola del tre composta. Indichiamo con C un capitale qualunque, con T il tempo che rimane impiegato, con I l'interesse che produce in questo tempo, e con i l'interesse di un anno sul capitale di 100 ducati; la regola composta distinguerà tre diverse specie di quantità che potranno disporsi come segue,

Capitali	Tempi	Interessi
100	12 ^{mesi}	i
C	T	I

Laonde, se delle quattro quantità generali i , C , T , I se ne suppongano conosciute tre, si potrà determinare la quarta con le norme dato nel §. 67. Si voglia per esempio trovare l'interesse I , e si dirà; l'interesse cresce crescendo il capitale ed il tempo durante il quale rimane impiegato, per cui le ragioni de' capitali e de' tempi sono dirette a quella della cosa cercata alla cosa data, e si avrà,

$$I : i :: C \times T : 100 \times 12$$

Questa proporzione risolve tutti i quattro ultimi problemi. Infatti, l'interesse

cercato I si otterrà subito moltiplicando fra loro i termini medi $i, C \times T$ e dividendo il prodotto che ne risulta per l'estremo 100×12 , cioè sarà

$$I = \frac{i \times C \times T}{100 \times 12} = C \times \frac{i}{100} \times \frac{T}{12}.$$

Similmente si avrà

$$i = I \times \frac{100}{C} \times \frac{12}{T}.$$

Per calcolare C e T si rifletterà che il termine medio $C \times T$ si ha moltiplicando I per 100×12 , e dividendo il prodotto ottenuto per i ; sarà dunque

$$C \times T = \frac{I \times 100 \times 12}{i}.$$

E poichè la frazione $\frac{I \times 100 \times 12}{i}$ rappresenta il prodotto di C per T , essa divisa per uno de' fattori C , o T deve dare l'altro fattore; quindi si avrà

$$C = \frac{I \times 100 \times 12}{i} : T = \frac{I \times 100 \times 12}{i \times T}, \text{ e}$$

$$T = \frac{I \times 100 \times 12}{i} : C = \frac{I \times 100 \times 12}{i \times C}.$$

Si osservi che nell'ultima proporzione, se si faccia $T = 12$, i termini della seconda ragione potranno dividersi per questo numero, e ne risulterà la proporzione $I : i :: C : 100$, che ci ha servito a risolvere le prime tre quistioni.

Termineremo questo articolo con dare una regola pratica per risolvere il problema IV, che è il più importante, come quello che occorre assai più frequentemente degli altri. Ritenendo, per fissare le idee, le quantità menzionate di sopra, siccome la rendita 147 si ottiene moltiplicando il capitale 2450 per la ragione dell'interesse $\frac{6}{100}$, (Prob. I) si potrà scrivere $2450 \times \frac{6}{100}$ in vece di 147 nell'espressione $x = 147 \times \frac{17^m 8^s}{12^m}$ indicante l'interesse per $17^m 8^s$ (Prob. IV), e si avrà

$$x = 2450 \times \frac{6}{100} \times \frac{17^m 8^s}{12^m};$$

Dalla quale eguaglianza può ricavarsi la regola che, l'interesse di un capitale ad una data ragione e per un tempo determinato si calcola, moltiplicando il capitale per la ragione dell'interesse, e pel dato tempo espresso in frazione vera o spuria dell'anno. Così il frutto di 1520 ducati per 5 mesi e 10 giorni, alla ragione del

$4 \frac{1}{2} p. \frac{2}{100}$ (*), si ottiene moltiplicando 1520 per $\frac{4 \frac{1}{2}}{100}$ e per $\frac{5^m \frac{1}{2}}{12^m}$, cioè si avrà,

$$\text{Frutto cercato} = 1520 \times \frac{9}{200} \times \frac{16}{36} = 1520 \times \frac{2}{100} = 30,40.$$

(*) La frase, per 100, si scrive abbreviatamente, $p. \frac{2}{100}$, come qui sopra.

La regola precedente non è che la traduzione in linguaggio ordinario del valore generale trovato di sopra per l'interesse di un capitale qualunque cioè,

$I = C \times \frac{i}{100} \times \frac{T}{12}$, nel quale $\frac{i}{100}$ rappresenta la ragione dell'interesse, e $\frac{T}{12}$ il tempo espresso in dodicesimi di anno. Ma bisogna avvertire che,

volendo calcolare quell'interesse con tutta l'esattezza, alla frazione $\frac{T}{12}$ deve sostituirsi il tempo T espresso in giorni e diviso pel numero de' giorni contenuti in un anno, cioè per 365. Per esempio il frutto di un capitale di 24500 ducati pei mesi di Aprile, Maggio e Giugno, e 10 giorni di Luglio, alla ragione del 6 p. $\frac{6}{100}$, si calcolerà, con tutta l'esattezza, moltiplicando 24500 per 0,06 e per $\frac{101 \text{ giorni}}{365 \text{ giorni}}$, perchè Maggio contenendo giorni 31, i tre mesi equivalgono a 91 giorni. In tal modo si otterrà

$$I = 24500 \times 0,06 \times \frac{101}{365} = 470 \times \frac{101}{365} = 406,77.$$

Considerando poi i tre mesi eguali fra loro e di 30 giorni ciascuno, come ne' problemi precedenti, il valore d' I , espresso da $24500 \times 0,06 \times \frac{3 \times 30}{12}$ si avrebbe dal seguente calcolo

per un anno	24500 × 0,06 = 1470
per 3 mesi ($\frac{3}{4}$)	367,5
per 10 giorni ($\frac{1}{12}$)	40,83
per 3 ^{me} . 10 ^{gi}	408,33

L'errore che si commette nel modo ordinario di calcolare gl'interessi non è dunque di gran rilievo, attesochè da una parte si trascura qualche giorno nella valutazione del tempo T , e dall'altra l'anno si considera di soli 360

giorni, lo che stabilisce un certo compenso nel valore della frazione $\frac{T}{12}$, e secondo i diversi casi l'errore può essere in più o in meno.

Non può dirsi lo stesso della maniera, altronde ingegnosa, di calcolare gl'interessi usata dai negozianti, che produce un errore spesso più grande. In fatti, essi esprimono il tempo in giorni, e suppongono l'anno di 360 giorni soltanto, dimodochè il frutto di un capitale di *Duc.* 24500, impiegato al 6 p. $\frac{6}{100}$ come qui sopra, sarebbe dato da,

$$I = 24500 \times \frac{6}{100} \times \frac{101}{360} = 412,42;$$

valore notabilmente maggiore del vero 406,77. Or dalla supposizione dell'anno di 360 giorni, e della ragione dell'interesse al 6 p. $\frac{6}{100}$ risulta che il prodotto,

$24500 \times \frac{6}{100} \times \frac{101}{360}$ si può mutare in, $245 \times 6 \times \frac{101}{360}$, ovvero in

$245 \times \frac{101}{60}$ o finalmente in $\frac{245 \times 101}{6}$; e quest'ultima espressione dimo-

stra che, l'interesse di un capitale al 6 p. $\frac{6}{100}$ si ottiene moltiplicando la millesima parte del capitale pel numero de' giorni corrispondenti al tempo in cui è posto a frutto, e prendendo la sesta parte del prodotto. Questo modo di operare riesce molto comodo quando si tratta di calcolare il frutto di diversi capitali alla stessa ragione del 6 p. $\frac{6}{100}$; per esempio, 57 giorni d'interessi sul capitale 2450, 18 giorni sul capitale 15000, 91 giorni sul capitale 3000 etc, si calcoleranno aggiungendo insieme i prodotti $2,45 \times 57$, 15×18 , 3×91 etc, e prendendo il sesto della somma.

Per calcolare l'interesse ad una ragione diversa dal 6 p. $\frac{6}{100}$, si calcolerebbe prima l'interesse al 6, il quale si modificherebbe poi opportunamente, aggiugnendovi o togliendone una parte aliquota corrispondente alla differenza delle ragioni. Così l'interesse al 7 $\frac{1}{2}$ p. $\frac{6}{100}$ per 65 giorni sul capitale 24000 si avrà, calcolando il 6 p. $\frac{6}{100}$, ed aggiugnendovi la sua quarta parte, perchè l'eccesso $1\frac{1}{2}$ di 7 $\frac{1}{2}$ sopra 6 è quarta parte di 6; quindi l'interesse al 6 p. $\frac{6}{100}$ essendo $\frac{24 \times 65}{6} = 4 \times 65 = 260$, l'interesse al 7 $\frac{1}{2}$ sarà

$260 + \frac{260}{4} = 325$. Similmente per calcolare l'interesse al 4 p. $\frac{6}{100}$ per 107 giorni sul capitale 12500, si calcolerà l'interesse al 6, che sarà $\frac{12,5 \times 107}{6} = 222,92$, e se ne toglierà la terza parte; il resto 148,61 esprimerà l'interesse al 4.

§. 69.

Regola di sconto.

Un capitale qualunque dato ad interesse, se si considera unito al suo frutto, cresce evidentemente col decorso del tempo; così alla fine di un anno il capitale viene aumentato di un'annata d'interesse, dopo due anni è accresciuto di due annate etc, ed infra l'anno può considerarsi aumentato dell'interesse corrispondente al tempo trascorso da che fu posto a frutto. Per trovare ad un'epoca qualunque il valore di un capitale così aumentato si calcolerà l'interesse pel tempo decorso, e si aggiungerà al capitale primitivo; ma si potrà fare anche diversamente, come segue.

Data la ragione dell'interesse per un anno è facile trovarla per una parte qualunque di esso; così se la ragione è del 6 p. $\frac{6}{100}$ l'anno, per sei mesi sarà del 3 per 100, per quattro mesi del 2 per 100, per un mese di $\frac{1}{2}$ per 100 etc. Laonde per trovare, a cagion d'esempio, il frutto di quattro mesi del capitale 2450 alla ragione del 6 per 100 l'anno, ovvero del 2 per 100 in quattro mesi, dovrà stabilirsi la proporzione

$$100 : 2 :: 2450 : x = 49,$$

dalla quale, mettendo in luogo d' x il suo valore 49; componendo ed invertendo (§. 59, 56) si ottiene l'altra

$$100 : 102 :: 2450 : 2499, \text{ e quindi}$$

$$2499 = 2450 \times \frac{102}{100} = 2450 \times 1,02;$$

cioè il valore di un capitale qualunque ad una data epoca è uguale al

capitale primitivo moltiplicato per l'unità accresciuta della ragione dell'interesse corrispondente al tempo durante il quale il fondo è stato impiegato.

L'ultima proporzione dà pure

$$2450 = 2499 \times \frac{100}{102} = 2499 : \frac{102}{100}, \text{ ovvero, } 2450 = \frac{2499}{1,02};$$

la quale eguaglianza dimostra che, conoscendo il valore di un capitale ad una data epoca e la ragione dell'interesse per un anno, si può trovare il capitale primitivo dividendo il dato valore per l'unità accresciuta della ragione dell'interesse calcolata pel tempo durante il quale il fondo è stato impiegato. Su questo principio è fondata la regola di sconto.

Lo sconto è relativo all'uso di alcune carte dette in commercio *cambiali* o *boni* nello quali un negoziante promette il pagamento di una somma di denaro alla fine di un tempo determinato. Chi possiede una di queste carte quando è trascorso il tempo stabilito, o come suol dirsi, alla scadenza della cambiale o del *bono*, si presenta al negoziante e riceve la somma promessa; ma se gli bisognasse il denaro prima della scadenza, potrà ritirarlo dallo stesso negoziante, o anche da un altro, rilasciandogliene una parte a titolo d'interesse o guadagno, il quale in questo caso si chiama *sconto*, e si regola nel modo seguente.

I. Il possessore di una cambiale di 350 ducati che scade dopo 9 mesi, vuol esigere subito il suo denaro, senza aspettare il termine stabilito; si domanda qual somma dovrà ricevere dal negoziante? Riflettasi che costui avendo i suoi capitali in commercio ne ritrae un interesse che supponiamo del 6 p. $\frac{6}{100}$ l'anno; per conseguenza, se egli ritenesse per altri 9 mesi presso di se la somma di cui si tratta, ne ritrarrebbe un frutto che perdo anticipandola, ed è questo lo *sconto* che gli si deve. Or la somma di 350 ducati promessa nella cambiale può considerarsi come il valore che acquista dopo nove mesi un capitale impiegato al 6 p. $\frac{6}{100}$ l'anno, e la somma che deve ricevere prontamente il possessore della cambiale sarà quel primitivo capitale. Per calcolarlo, a norma della regola data qui sopra, bisogna prima determinare la ragione dell'interesse per 9 mesi, che in proporzione del 6 p. $\frac{6}{100}$ l'anno sarà il $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{6}{100}$, cioè 0,045; e dividendo poi 350 ducati per 1,045, il quoziente 334,93 indicherà la somma che deve esigere prontamente il proprietario della cambiale. Questa somma è il *valore attuale* della cambiale, chiamandosi *valor nominale* la somma che si paga alla scadenza. Lo sconto rilasciato al negoziante sarà dunque 15,07, differenza fra 350 e 334,93, e corrisponde all'interesse di 9 mesi al 6 p. $\frac{6}{100}$ l'anno sulla somma ricevuta di 334,93, come può verificarsi. Questa maniera di calcolare lo sconto è la più giusta, e si chiama *prendere lo sconto al di dentro*, ma è molto più usata la seguente, quantunque meno esatta, in cui lo sconto si prende *all'infuori*.

Lo sconto si prende *all'infuori* calcolando l'interesse pel tempo della scadenza sul valor nominale della cambiale. Così lo sconto di 350 ducati per 9 mesi al 6 p. $\frac{6}{100}$ sarà (§. 68),

$$350 \times 0,06 \times \frac{9}{12} = 350 \times 0,045 = 15,75.$$

Similmente lo sconto di D. 15140 per 50 giorni al $\frac{1}{4}$ p. $\frac{6}{100}$ al mese, sarebbe

$$15140 \times \frac{\frac{1}{4}}{100} \times \frac{50}{30} = 151,40 \times \frac{1}{4} = 189,25;$$

dove si avverte che il tempo della scadenza si è espresso in frazione di mese perchè la ragione dell'interesse era data per un mese.

Per ottenere lo sconto *al di dentro* in questo secondo esempio si cercherebbe la ragione dell'interesse per 50 giorni, corrispondenti ad un mese e $\frac{5}{12}$, la quale sarebbe $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{4} p. \frac{5}{12}$, ossia $\frac{5}{4} \frac{5}{12}$, e diviso il valor nominale 15140 della cambiale per l'unità accresciuta di questa frazione,

si otterrebbe il valore attuale cioè, $15140 : \frac{405}{400} = 14953,09$; lo sconto

sarebbe perciò 186,91, minore dello sconto all'infuori per 2,34. Questa differenza è una perdita che fa il proprietario della cambiale, ed un guadagno del banchiere al di là di quanto gli spetta per l'anticipazione del pagamento.

II. Un negoziante ha pagato D.^{ti} 14953,09 per una cambiale di D.^{ti} 15140 che scade dopo 50 giorni; si domanda a che ragione è stata scontata la cambiale, considerando lo sconto al di dentro? Si è veduto che il valore *attuale* si ottiene dividendo il valor *nominale* per l'unità accresciuta della ragione dell'interesse calcolato pel tempo della scadenza; quindi il valor nominale è un prodotto che ha per fattori il valore attuale e l'unità aumentata della ragione dell'interesse, e però diviso pel valore attuale, deve dare l'altro fattore. Eseguendo la divisione di 15140 per 14953,09 si avrà per quoziente 1,0125; la ragione dell'interesse sarà dunque 0,0125 per 50 giorni, o per un mese si calcolerà come segue,

per 50 giorni	0,0125
per 10 giorni ($\frac{1}{5}$)	0,0025
per 20 giorni (il doppio)	0,0050
per 30 giorni	0,0075;

cioè la ragione dell'interesse sarà di $\frac{0,75}{100}$, o sia di $\frac{3}{4} p. \frac{5}{12}$ al mese.

Se fosse dato lo sconto all'infuori 189,25 della somma 15140, per la scadenza di 50 giorni, e si volesse conoscere la ragione dell'interesse, dovrebbe a quest'oggetto applicarsi la regola data nel §. 68 prob. VI. Ma nel nostro caso, calcolandosi l'interesse per mese e non per anno, in vece della rendita, si cercherà l'interesse per un mese con la proporzione $50 : 30 :: 189,25 : x = 189,25 \times 0,6 = 113,55$; indi si dividerà questo numero per 15140, ed il quoziente 0,0075 dinoterà che la cambiale è stata scontata al $\frac{3}{4} p. \frac{5}{12}$ al mese.

Posti questi principii non sarà difficile la risoluzione degli altri problemi che potrebbero proporsi su questo argomento, come di trovare il valor nominale della cambiale, conoscendosi il valore attuale, la ragione dell'interesse ed il tempo della scadenza; o pure di trovare questo tempo essendo dati i valori attuale e nominale, o la ragione dell'interesse. Noi ne lasciamo il carico ai giovani per loro esercizio.

§. 70.

Della rendita consolidata.

Quando un governo per bisogni dello Stato contra qualche debito, prendendo denaro a prestito da particolari negozianti o banchieri, suole ordinariamente, mpenarli con creare o cedere a loro favore una *rendita* corrispondente al capitale ricevuto, la quale si paga a rate semestrali dal suo tesoro; riservandosi di *estinguere* a poco a poco il capitale secondo che le

sue finanze glielo permettono. I primi proprietari di quella rendita sono dunque i negozianti che hanno fatto l'imprestito, ma per comodità del commercio è stabilito che essa possa cedere o vendersi ad altri, restando a cura del governo di far *iscrivere* i nomi dei nuovi possessori in un apposito registro che suol chiamarsi *Gran Libro*, affinchè godano, in vece degli antichi, de' pagamenti semestrali. La rendita, detta *consolidata* o *iscritta*, diviene quindi una mercanzia, che si compra e vende come qualunque altra, e però il suo prezzo varia a norma delle ricerche; è chiaro poi che un tal prezzo rappresenta il capitale corrispondente alla rendita. Il governo nel creare la rendita destina anche un fondo annuale per la sua *ammortizzazione*, cioè impiega annualmente una somma stabilita a comprare dai particolari una porzione di rendita consolidata per annullarla o *ammortizzarla* ed estinguere così a poco a poco il suo debito. Diminuendo per questo motivo d'anno in anno la quantità della rendita in commercio, ne aumenta naturalmente il prezzo, purchè non vi siano altre cause tendenti a farlo diminuire, come un nuovo prestito che facesse il governo, o pure qualche oscillazione commerciale o politica, che potrebbero porre in dubbio il pagamento puntuale della rendita.

Le rendite consolidate, offrendo un mezzo comodo e facile d'impiegare il denaro, sono divenute in Europa un ramo importante di commercio, per la qual cosa abbiamo creduto utile di trattare qui appresso le principali quistioni che ad esse si riferiscono.

I. Si vogliono acquistare D.^{li} 114 di rendita iscritta al prezzo di D.^{li} 81 $\frac{3}{4}$; si domanda qual somma si dovrà sborsare? Il prezzo che regola tutte le contrattazioni, come quello che si legge sui *listini* della *Borsa*, corrisponde sempre a 5 ducati di rendita annuale; perciò si dovranno sborsare D.^{li} 81 $\frac{3}{4}$ per ogni 5 ducati di rendita, ed il costo di 114 ducati di rendita si otterrà dalla proporzione,

$$5 : 114 :: 81,75 : x = \frac{81,75 \times 114}{5} = 1863,90$$

Ma questo calcolo si esegue con una regola pratica semplicissima; si cerca il costo di 1 ducato di rendita prendendo la quinta parte del prezzo 81,75. la quale si ha raddoppiando la sua decima parte (§. 45, IV), ed indi si moltiplica quel costo pel numero 114 indicante la quantità della rendita che si vuol comprare. O in altro modo, si moltiplica la decima parte del prezzo pel doppio della rendita da acquistarsi (§. 40), e si ottiene il costo totale della rendita; così 153 ducati di rendita a 99 $\frac{7}{8}$ importano $9,9875 \times 306 = 3056,17 \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r} 81,75 \\ 2 \\ \hline 16,350 \\ 114 \\ \hline 6540 \\ 1635 \\ \hline 1635 \\ \hline 1863,90 \end{array}$$

Dalla proporzione precedente avendosi $x = 81,75 \times \frac{114}{5}$, si vede ancora che la somma da sborsarsi per acquistare una data quantità di rendita si può calcolare moltiplicando il quinto di quella rendita pel prezzo di 5 ducati. E considerando in questa moltiplicazione il quinto della rendita da acquistarsi come moltiplicando, ed il prezzo di 5 ducati come moltiplicatore, è chiaro che crescendo o diminuendo un tal prezzo di una o più unità, il prodotto crescerà o diminuirà di una o più volte il quinto della rendita, cioè per ogni punto di aumento o di diminuzione del prezzo di 5 ducati, il costo totale di una data quantità di rendita da acquistarsi cresce o diminuisce del quinto di quella rendita. In effetto, 114 ducati di rendita ad 82 $\frac{3}{4}$ costano D.^{li} 1886,70, e questa somma supera di $22,8 = \frac{114}{5}$ il costo degli stessi ducati 114 trovato di sopra al prezzo di 81 $\frac{3}{4}$.

Se per l'acquisto di una data quantità di rendita si fosse sborsata una certa somma, e si volesse conoscere il prezzo al quale si è comprata quella rendita, da ciò che precede chiaramente appare che bisognerebbe *dividere la somma sborsata per la quinta parte della rendita*, o, ciò che vale lo stesso, *dividere il decuplo della somma sborsata pel doppio della rendita*.

II. Si domanda, quanta rendita iscritta si può comprare con D.^u 1863,90 al prezzo di $81\frac{3}{4}$? La proporzione $81,75 : 1863,90 :: 5 : x = 114$ risolve il problema, ma il valore d' x si ottiene più facilmente *cercando, come sopra, il costo 16,35 di un ducato di rendita e dividendo per questo numero la somma 1863,90 da impiegarsi in compra*. Per un altro esempio, si vogliano impiegare 16400 ducati in compra di rendita consolidata a $7\frac{1}{4}$, e l'operazione per trovare la quantità della rendita consisterà in dividere 16400 per 14,8, che si ottiene raddoppiando la decima parte di $7\frac{1}{4}$; il quoziente 1108,11 indicherà la rendita che si può acquistare, ma si avverte che, per semplicità di scrittura, il *Gran libro* non permette che l'acquisto di un numero intero di ducati di rendita, cominciando da un ducato.

III. Si vuol sapere a che ragione s'impiegherà il denaro comprandone rendita al prezzo di $81\frac{3}{4}$? Poichè $81\frac{3}{4}$ rappresenta un capitale di cui la rendita è 5, la ragione dell'interesse sarà $5 : 81\frac{3}{4}$ (\$. 68) ovvero

$$\frac{20}{327} = 0,0612 = \frac{6,12}{100}, \text{ cioè } 6\frac{1}{16} p. \frac{6}{100} \text{ circa. Si potrebbe anche stabi-}$$

lire la proporzione

$$81\frac{3}{4} : 100 :: 5 : x = \frac{500}{81\frac{3}{4}} = 6\frac{1}{16} \text{ circa,}$$

dalla quale in vece della ragione dell'interesse si ottiene la rendita di 100 ducati, ma il calcolo è lo stesso.

§. 71.

De' l'interessi a moltiplico.

L'interesse di un capitale si paga ordinariamente alla fine di ogni anno; ma se, per circostanze del debitore, i pagamenti non si fanno con esattezza, gl'interessi di più annate, che sogliono dirsi *arretrati*, non danno alcun frutto, purchè non siasi altrimenti convenuto nel contratto. V'ha però un genere di contrattazioni in cui espressamente è stabilito che gl'interessi che *maturano* alla fine di ogni anno si aggiungano al capitale e producano insieme con esso il frutto dell'anno seguente, e così per più anni successivi sino alla restituzione del capitale con tutti gl'interessi, ed interessi d'interessi riuniti; una somma impiegata a questo modo dicesi posta a *moltiplico*, come avviene quando si dà il denaro ad una di quelle banche commerciali dette *Casse di risparmio*. Il calcolo degl'interessi a moltiplico, o *composti*, dipende dai principii esposti nel §. 69.

I. Si è dato a moltiplico il capitale di D.^u 2450, convenendosi gl'interessi al 6 p. 100 l'anno; si domanda dopo 4 anni a che ascenderà il capitale con gl'interessi? Alla fine del primo anno il valore del capitale unito agl'interessi sarà (\$. 69) $1450 \times 1,06$; o siccome questa somma deve considerarsi come un nuovo capitale fruttifero alla stessa ragione del 6 p. 100, alla fine del secondo anno il valore di un tal capitale unito agl'interessi sarà $2450 \times 1,06$ moltiplicato per 1,06, cioè $2450 \times 1,06 \times 1,06$. Simil-

mente questo terzo capitale unito agl'interessi diverrà alla fine del terzo anno $2450 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06$, e quest'ultimo capitale insieme col suo frutto ascenderà alla fine del quarto anno a

$$2450 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 = 3093,07.$$

Trattandosi d'interessi semplici, quali si sono considerati nel §. 68, il valore del capitale unito al suo frutto per un dato tempo non cambia se l'interesse si paghi annualmente o pure a rate semestrali, bimestrali, o in qualunque altro modo; ma diversamente accade se si tratta d'interessi composti, poichè quanto più breve è il periodo dopo il quale l'interesse si unisce al capitale per produrre un nuovo interesse, più rapido è l'accrescimento del capitale. Ripigliando il problema proposto, se gl'interessi dovessero cumularsi in ogni sei mesi sul capitale, bisognerebbe nel calcolo considerare questo periodo di tempo in vece dell'anno; e poichè la ragione dell'interesse per sei mesi è 0,03, il capitale aumentato dopo 4 anni, ossia dopo 8 periodi di sei mesi, sarebbe

$$2450 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 = 3103,59.$$

Dunque, per trovare il valore che acquista una somma data a moltiplico alla fine di un certo tempo, deve moltiplicarsi il capitale proposto per l'unità accresciuta della ragione dell'interesse corrispondente al periodo stabilito per la cumolazione degl'interessi, e ripetere la moltiplicazione per lo stesso fattore sino a che il numero delle moltiplicazioni sia eguale al numero de' periodi contenuti nel dato tempo. Così se il capitale di D.^o 2450 fosse dato a moltiplico alla ragione del 6 p. 100 l'anno, con doversi cumulare gl'interessi ogni 16 mesi, la ragione dell'interesse per questo periodo di tempo sarebbe 0,08, ed il capitale dopo 4 anni ammonterebbe a

$$2450 \times 1,08 \times 1,08 \times 1,08 \times 1,08 = 3086,29.$$

Da un simile calcolo risulta che una somma qualunque, posta a moltiplico con gl'interessi al 5 p. 100 l'anno, e da cumularsi ogni anno sul capitale, si raddoppia in poco più di 14 anni, mentre riunendo gl'interessi semplici non si raddoppierebbe se non dopo 20 anni, perchè ogni capitale eguaglia 20 volte la sua rendita al 5 p. 100; e se la somma sarà posta a moltiplico con gl'interessi alla ragione del 6 p. 100, si raddoppierà in poco meno di 12 anni.

Si può dare una regola generale per conoscere in quanti anni diviene doppio o triplo un capitale posto a moltiplico con qualunque interesse: per trovare il numero degli anni in cui si raddoppia il capitale si dividerà il numero $69 \frac{1}{2}$ per l'interesse annuale sul capitale 100, ed al quoziente si aggiungerà $\frac{1}{2}$; e per trovare in quanti anni il capitale diviene triplo, si dividerà il numero 110 per quell'interesse ed al quoziente si aggiun-

gerà $\frac{1}{2}$ (*). Così un capitale posto a moltiplico al 4 p. $\frac{5}{6}$ diviene triplo

$$\text{dopo } \frac{110}{4} + \frac{1}{2} = 28 \text{ anni}$$

II. Un particolare deve soddisfare ad un suo debito di D.^u 2000 dopo tre anni; si domanda che somma dovrebbe impiegare a moltiplico, con l'interesse al 6 p. 100 l'anno da aggiungersi al capitale in ogni nove mesi, affinchè in tre anni potesse cumulare i 2000 ducati che gli bisognano? La ragione dell'interesse per 9 mesi sarà $0,06 \times \frac{3}{4} = 0,045$, e siccome tre anni contengono quattro periodi di 9 mesi, così chiamando x la somma da darsi a moltiplico, il suo valore alla fine del terzo anno verrà espresso, secondo la regola, da

$$x \times 1,045 \times 1,045 \times 1,045 \times 1,045$$

Ma dopo tre anni il capitale impiegato deve aver raggiunto il termine stabilito di 2000 ducati, dunque dovrà verificarsi l'eguaglianza

$$x \times 1,045 \times 1,045 \times 1,045 \times 1,045 = 2000;$$

dalla quale, come altrove più volte si è mostrato, si ricava facilmente,

$$x = \frac{2000}{1,045 \times 1,045 \times 1,045 \times 1,045} = 1677,12$$

(*) Chiamiamo C un capitale qualunque posto a moltiplico, i l'interesse annuale sul capitale 100, ed x il numero degli anni in cui il capitale C si raddoppia; da ciò che di sopra è detto si ricava l'eguaglianza

$$C \left(1 + \frac{i}{100} \right)^x = 2C, \text{ ovvero } \left(1 + \frac{i}{100} \right)^x = 2, \text{ da cui}$$

$x \log \left(1 + \frac{i}{100} \right) = \log 2$. Sviluppando in serie il logaritmo, e passando ai logaritmi briggiani si avrà

$$x \times 0,4342945 \left(\frac{i}{100} - \frac{i^2}{2(100)^2} + \frac{i^3}{3(100)^3} - \text{ct.} \right) = 0,30103, \text{ ed}$$

$$xi \left(1 - \frac{i}{200} + \frac{i^2}{30000} \right) = \frac{0,30103 \times 100}{0,4342945} = 69,315, \text{ onde}$$

$$xi = 69,315 \left(1 - \frac{i}{200} + \frac{i^2}{30000} \right)^{-1} = 69,315 + \frac{69,315i}{200} - \frac{69,315i^2}{120000}$$

e finalmente

$$x = \frac{69,315}{i} + 0,3466 - 0,0006i;$$

dove il termine $0,0006i$, qualunque sia il valore dell'interesse i , non potendo giungere che a qualche centesimo di anno, è sempre trascurabile in questa ricerca.

L'espressione $\left(1 + \frac{i}{100} \right)^y = 3$ sviluppata similmente darà il seguente valore d' y indicante il numero degli anni in cui il capitale diviene triplo,

$$y = \frac{109,861}{i} + 0,5493 - 0,0009i.$$

Dovendo scontare una cambiale a lunga scadenza, qualche volta si conviene lo sconto con gl'interessi composti, ed allora è chiaro che la somma da pagarsi prontamente si potrà calcolare come un capitale che dato a multiplo produca, nel tempo della scadenza, il valor nominale della cambiale. Per esempio il valore attuale di una cambiale di D.^{li} 3000 che scade dopo 6 mesi, e deve scontarsi con gl'interessi composti alla ragione dell'1 p. 100 al mese, da cumularsi ogni mese, si calcolerà dividendo 3000 per

$$1,01 \times 1,01 \times 1,01 \times 1,01 \times 1,01 \times 1,01;$$

ed il risultamento dell'operazione sarà 1826,13.

§. 72.

Degl'interessi a scalare. Vitalizi.

I contratti d'imprestito ad interesse detti anche *mutui*, si fanno ordinariamente per un tempo determinato, trascorso il quale, il debitore è obbligato a restituire il capitale con tutti gl'interessi arretrati, qualora non li avesse pagati esattamente alle loro scadenze. Ma per render più facile la restituzione del capitale spesso si conviene di farla in *rate*, di cui è definita la quantità e l'epoca del pagamento; e siccome in questo caso gl'interessi, dopo il pagamento di una o più rate, non ricadono più sull'intero capitale, ma vanno a mano a mano scemando, così prendono il nome d'interessi *a scalare*. I contratti d'interesse a scalare sono di due maniere, secondo che la rata che si paga alle convenute scadenze comprende oppur no gl'interessi. Per esempio, un capitale di 800 ducati è dato ad interesse col patto di doversi restituire in quattro rate eguali pagabili alla fine di ciascun anno, oltre gl'interessi maturati; ed in questo modo di contrattazione, qualunque sia la ragione dell'interesse, il capitale sarà sempre *estinto* nel tempo stabilito di quattro anni, poichè alla fine del 1.^o anno il debitore pagherà 200 ducati più gl'interessi calcolati sull'intero capitale, alla fine del 2.^o anno pagherà 200 ducati più gl'interessi sul capitale ridotto a D.^{li} 600, e similmente per gli altri due anni. Se però si conviene che la rata di 200 ducati debba essere l'unico pagamento da farsi alla fine di ciascun anno, una parte di questa somma sarà destinata a soddisfare gl'interessi e la rimanente andrà in diminuzione del capitale, ed è chiaro che quest'ultima porzione sarà tanto più grande quanto minore è la prima, cioè quanto minore è la ragione dell'interesse, dalla quale per conseguenza dipenderà pure il tempo della totale *estinzione* del capitale.

Non e' intratterremo sulla prima maniera d'interessi a scalare perchè non presenta alcuna particolarità. Il calcolo degl'interessi alla seconda maniera è anche facile; infatti riprendendo l'esempio precedente, se la ragione dell'interesse sarà del 5 p. 100, alla fine del 1.^o anno il debitore con 200 ducati pagherà D.^{li} 40 per gl'interessi e D.^{li} 160 in diminuzione del capitale, che sarà ridotto a D.^{li} 640; alla fine del 2.^o anno il debitore con 200 ducati pagherà D.^{li} 32 per interessi sul capitale restante, ed altri 168 ducati in diminuzione di esso, e così andando avanti alla fine del 4.^o anno il capitale sarà ridotto a D.^{li} 110,38, che unito al suo interesse ascenderà a D.^{li} 115,90 alla fine del 5.^o anno, e potrà essere estinto con una egual somma.

Con quest'ultima specie di contratto la restituzione di un capitale posto a frutto si fa in rate eguali alla fine di ciascun anno, alle quali si dà perciò il nome di *annualità*. Potrebbe domandarsi quale deve essere l'annualità da pagarsi per restituire in un dato tempo un capitale impiegato ad una determinata ragione, o pure in quanto tempo con una convenuta an-

nualità dovrà estinguersi un capitale impiegato a l una data ragione; ma questi problemi non si risolvono agevolmente con gli ordinarii mezzi dell'Aritmetica, e noi ci limiteremo a dire qualche cosa de' *vitalizi*, aggiungendo una tavoletta che potrà riuscire utile a coloro che dovessero prender parte a simili contratti.

Il *vitalizio* consiste in una annualità che si paga ad alcuno durante la sua vita, a titolo di restituzione di un capitale ricevuto da lui a prestito ad una convenuta ragione. Per comprenderne chiaramente il significato facciamo il seguente confronto. Un capitale di 1000 ducati posto a frutto al 5 p. 100 l'anno dà una rendita di 50 ducati, che deve considerarsi *perpetua* perchè, tenendo sempre impiegato il capitale, con rinnovare quando occorre i contratti, esso deve produrre sempre il suo frutto; ma se, dato a prestito il capitale di 1000 ducati, si conviene che debba essere restituito mediante un'annualità di 100 ducati, dopo 14 anni circa il capitale rimarrà estinto (*); e supponendo inoltre che, in vece di considerare l'annualità di 100 ducati composta degl'interessi a scalaro e di parte del capitale, voglia riguardarsi semplicemente come una rendita, si potrà concludere che una rendita *perpetua* di 50 ducati, calcolata sul capitale di 1000 ducati alla ragione del 5 p. 100 l'anno, equivale ad una rendita di 100 ducati per soli 14 anni, rimanendo estinto il capitale. Ora, se il possessore di un capitale potesse conoscere la durata della propria vita, non avendo eredi cui lasciare la sua proprietà, e con essa la rendita che ne deriva, gli converrebbe ricavarne un'annualità o rendita maggiore, e tale che lo rimborsasse mentre vive del suo capitale, che si estinguerrebbe alla sua morte. Ma quantunque sia impossibile determinare la durata speciale della vita di un individuo, dalle *Tavole di mortalità* si può desumere quanto probabilmente rimano di vita ad una persona qualunque di conosciuta età. Questo calcolo fondato sull'esperienza di moltissimi anni o di moltissime persone, se può esser fallace per una data individualità, è però sempre esatto nel complesso di molti casi simili, e serve a regolare i contratti di vitalizio secondo l'età, ossia a stabilire l'annualità, o rendita *vitalizia*, da pagarsi in vece della rendita ordinaria corrispondentemente al capitale che si riceve ed alla ragione dell'interesse convenuta.

Nella seguente tavoletta si veggono in più colonne registrate 1.^o l'età, 2.^o la corrispondente durata probabile della vita, 3.^o la rendita vitalizia calcolata sul capitale di 100 ducati in modo che con quella annualità si compia la restituzione del capitale durante la vita probabile stabilita nella 2.^a colonna. E siccome l'annualità cambia con la ragione dell'interesse, così la rendita vitalizia si è calcolata in relazione della rendita ordinaria convenuta alle diverse ragioni del 4, 5, e 6 p. 100 l'anno.

(*) È facile, quantunque noioso, verificare questo risultamento col calcolo degl'interessi a scalaro al 5 p. 100 l'anno.

ETÀ.	Durata probabile della vita.	RENDITA vitalizia corrispondente al capitale 100, quando l'interesse del denaro è al			ETÀ.	Durata probabile della vita.	RENDITA vitalizia corrispondente al capitale 100, quando l'interesse del denaro è al		
		4 p. °	5 p. °	6 p. °			4 p. °	5 p. °	6 p. °
	an. anni					an. anni			
30	29,39	5,83	6,56	7,32	56	13,30	9,84	10,47	11,12
32	28,14	5,99	6,70	7,44	58	12,20	10,52	11,15	11,79
34	26,88	6,14	6,84	7,58	60	11,14	11,30	11,93	12,57
36	25,62	6,31	7,01	7,74	62	10,12	12,21	12,83	13,47
38	24,36	6,50	7,19	7,91	64	9,13	13,26	13,88	14,51
40	23,09	6,71	7,40	8,11	66	8,24	14,48	15,10	15,73
42	21,83	6,95	7,63	8,34	68	7,38	15,90	16,52	17,15
44	20,56	7,23	7,90	8,59	70	6,58	17,57	18,19	18,82
46	19,30	7,53	8,20	8,89	72	5,83	19,56	20,19	20,82
48	18,06	7,88	8,54	9,22	74	5,14	21,90	22,53	23,17
50	16,83	8,28	8,93	9,60	76	4,51	24,63	25,27	25,92
52	15,63	8,73	9,37	10,04	78	3,93	27,98	28,63	29,29
54	14,45	9,25	9,88	10,54	80	3,45	31,60	32,26	32,92

L'uso di questa tavola non è difficile. Vogliasi per esempio la rendita vitalizia che una persona di anni 46 deve percepire da un capitale di 2450 ducati, supponendo che la rendita ordinaria si calcoli, ne' contratti di prestito, alla ragione del 4 p. °: si cerchi il numero 46 nella colonna dell' *Età*, e nell'incontro della linea orizzontale di questo numero con la colonna verticale del 4 p. ° si troverà 7,53, che indica la rendita vitalizia di 100 ducati per quella età; laonde dovendosi per ogni 100 ducati esigere D. 7,53, si otterrà l'annualità domandata calcolandola come una rendita al 7,53 per 100 sul proposto capitale 2450 (Prob. I, del §. 68), e si avrà,

$$2450 \times \frac{7,53}{100} = 2450 \times 0,0753 = 184,48\frac{1}{2}.$$

Se l'età fosse $45\frac{1}{2}$, è chiaro che a questo numero, il quale non si trova nella tavola ma è compreso fra 44 e 46, dovrà nella colonna del 4 p. ° corrispondere una rendita compresa pure fra 7,23 e 7,53: e supponendo, come è permesso senza errore sensibile, che gli aumenti della rendita vitalizia siano proporzionali agli aumenti dell'età, si dirà, un aumento di 2 anni, da 44 a 46, sta ad un aumento di $1\frac{1}{2}$ anni, da 44 a $45\frac{1}{2}$, come stanno fra loro gli aumenti sulle rendite corrispondenti, cioè come l'aumento 0,30, da 7,23 a 7,53, sta al quarto termine x , che rappresenterà l'aumento da darsi alla rendita 7,23 affinché corrisponda all'età $45\frac{1}{2}$, e dopo avere dalla proporzione $2 : 1\frac{1}{2} :: 0,30 : x$ ricavato il valore d' $x = 0,225$, si aggiungerà a 7,23, e si otterrà la rendita vitalizia 7,455 corrispondente alla età $45\frac{1}{2}$ sul capitale 200.

Se poi si volesse la rendita vitalizia corrispondente all'età $45\frac{1}{2}$ ed alla ragione $4\frac{1}{4}$, non trovandosi nè l'uno nè l'altro dei due numeri nella tavola, si procederà nel seguente modo: si troverà come qui sopra la rendita al 4 p. $\frac{6}{10}$ corrispondente all'età $45\frac{1}{2}$, e si avrà l'aumento $x=0,225$, e la rendita 7,455; questo numero dovrà essere accresciuto alquanto per l'aumento $\frac{1}{4}$ sulla ragione, e supponendo che per una stessa età gli aumenti delle rendite siano proporzionali a quelli delle ragioni, si dirà, *l'aumento sulla ragione sta ad $\frac{1}{4}$ di aumento, come l'aumento 0,67 della rendita, da 7,23 a 7,90, sta al quarto termine $y=0,67 \times \frac{1}{4}=0,167$, che indicherà l'aumento da applicarsi alla rendita 7,455 per farla corrispondere alla ragione $4\frac{1}{4}$; la rendita vitalizia corrispondente alla età $45\frac{1}{2}$ ed alla ragione $4\frac{1}{4}$ sul capitale 100 sarà dunque 7,622 (*). Sul capitale 2450 la rendita vitalizia sarebbe $2450 \times 0,07622 = 186,74$.*

Aggiungiamo il calcolo di alcuni altri esempi per chiarir meglio queste idee.

Calcolo della rendita vitalizia sul capitale 100

per l'età 69 e la ragione $4\frac{1}{2}$

$$2 : 1 :: 17,57 - 15,90 : x$$

$$x = \frac{1,67 \times 1}{2} = 0,835$$

$$1 : \frac{1}{2} :: 16,52 - 15,90 : y$$

$$x = 0,835$$

$$y = 0,310$$

$$\text{Rendita dalla tavola} = 15,90$$

$$\text{Somma} = 17,045$$

per l'età $75\frac{3}{5}$ e la ragione $5\frac{3}{4}$

$$2 : 1 \frac{3}{5} :: 25,27 - 22,53 : x = 2,28$$

$$1 : \frac{3}{4} :: 23,17 - 22,53 : y = 0,48$$

$$\text{Rendita dalla tavola} = 22,53$$

$$\text{Somma} = 25,29$$

La stessa tavola precedente serve a risolvere il problema inverso cioè, volendo sciogliere, o come suol dirsi, *affrancare* un vitalizio, determinare il capitale da restituirsi in corrispondenza della rendita vitalizia che si paga, dell'età del godente e dell'interesse del denaro negli ordinarii contratti di prestito. Sia la rendita vitalizia di 72 ducati, l'età di colui che ne gode 36 anni, e l'interesse del denaro al 6 p. $\frac{6}{10}$. Cerchiamo nella tavola la rendita vitalizia corrispondente all'età di 36 anni, ed all'interesse del 6 p. $\frac{6}{10}$, e troveremo 7,74; e siccome una tal rendita corrisponde al capitale 100, è chiaro che se l'annualità che si paga fosse appunto 7,74, per affrancare il vitalizio si dovrebbero sborsare 100 ducati, onde per trovare il capitale corrispondente alla rendita vitalizia di 72 ducati si farà la proporzione, $7,74 : 72 :: 100 : x$ da cui si ricava $x = 930,23$, che è

(*) In generale per trovare un valore corrispondente a due argomenti qualunque in una tavola a doppia entrata sono necessari tre quarti proporzionali, ma nell'uso della tavola precedente bastano due soltanto, perchè le rendite calcolate per le diverse ragioni del 4, 5, e 6 p. 100 aumentano quasi egualmente al crescer della età.

il capitale domandato. Se l'età e l'interesse non si trovassero immediatamente nella tavola, bisognerebbe prendere i quarti proporzionali nel modo indicato di sopra.

§. 73.

Della regola congiunta.

Questa regola ha per oggetto di trovare il rapporto di due quantità le quali non sono paragonate immediatamente fra loro, ma hanno relazioni conosciute con altre quantità intermedie, dimodochè il rapporto cercato risulta dalla composizione di più rapporti dati. Essa si applica principalmente al cambio delle monete, per cui si chiama ancora regola di cambio. La discussione, o più propriamente, l'analisi istituita nel seguente problema basterà per darne una idea adeguata.

Si sa che 4 ducati napolitani equivalgono a 17 franchi (moneta di Francia), che 63 franchi equivalgono a 50 scellini inglesi, 130 scellini a 63 fiorini austriaci, e 27 fiorini a 260 reali di verglione di Spagna; si domanda 45 reali a quanti ducati napolitani corrisponderanno? (*).

Il primo rapporto che presenta l'enunciazione del problema è l'equivalenza di 4 ducati a 17 franchi; questo rapporto può scriversi in forma di eguaglianza come segue, avvertendo che 4 ducati, e 17 franchi sono la stessa cosa di 4 volte 1 ducato, e 17 volte 1 franco,

$$4 \times 1 \text{ ducato} = 17 \times 1 \text{ franco},$$

dove 4 e 17 sono numeri astratti; ma l'eguaglianza di due prodotti si può cambiare in una proporzione (§. 55), dunque si avrà

$$1 \text{ franco} : 1 \text{ ducato} :: 4 : 17$$

Similmente dal rapporto di equivalenza tra i franchi e gli scellini si ricaverà la proporzione,

$$1 \text{ scellino} : 1 \text{ franco} :: 63 : 50,$$

e così facendo con gli altri rapporti si potranno stabilire le seguenti proporzioni

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ franco} : 1 \text{ ducato} :: 4 : 17 \\ 1 \text{ scellino} : 1 \text{ fran.} :: 63 : 50 \\ 1 \text{ fiorino} : 1 \text{ scell.} :: 130 : 63 \\ 1 \text{ reale} : 1 \text{ for.} :: 27 : 260; \end{array} \right\} (A)$$

Da ultimo, indicando con x il numero di ducati equivalente a 45 reali, si avrà l'eguaglianza $45 \times 1 \text{ reale} = x \times 1 \text{ ducato}$, che si cambierà nella proporzione

$$1 \text{ ducato} : 1 \text{ reale} :: 45 : x$$

(*) Questi rapporti sono estratti dall'*Annuaire du Bureau des longitudes*, e riguardano i valori delle monete *al pari*, cioè considerando in esse soltanto la quantità di metallo fino d'oro o di argento che contengono, esclusa la lega.

Si moltiplichino fra loro termine per termine le cinque proporzioni precedenti, e sarà pure

$$1^{fr} \times 1^{sc} \times 1^{for} \times 1^{re} \times 1^{duc} : 1^{duc} \times 1^{fr} \times 1^{sc} \times 1^{for} \times 1^{reale}$$

$$\therefore 4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45 : 17 \times 50 \times 63 \times 260 \times x$$

ma i primi due termini di questa proporzione essendo identici, i secondi termini devono anche essere eguali, dunque

$$4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45 = 17 \times 50 \times 63 \times 260 \times x;$$

dalla quale eguaglianza si ricaverà il valore dell'incognita x riflettendo che il primo membro $4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45$ può considerarsi come un prodotto di cui sono fattori $17 \times 50 \times 63 \times 260$ ed x ; onde si avrà, come nel §. 65,

$$x = \frac{4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45}{17 \times 50 \times 63 \times 260} = \frac{4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 5.9}{17 \times 5.10 \times 63 \times 2.130} = \frac{27 \times 9}{17 \times 5} = 2,8588.$$

Laonde 45 *reali* equivalgono a *ducats* napolitani $2,85\frac{8}{100}$.

Dà questo procedimento si desume immediatamente una regola pratica semplicissima che può applicarsi a tutti i problemi dello stesso genere. Scriviamo i rapporti di equivalenza enunciati nel problema come segue;

$$\begin{aligned} 4 \text{ ducats} &= 17 \text{ franchi} \\ 63 \text{ franchi} &= 50 \text{ scellini} \\ 130 \text{ scellini} &= 63 \text{ fiorini} \\ 27 \text{ fiorini} &= 260 \text{ reali} \\ 45 \text{ reali} &= x \text{ ducats} \end{aligned}$$

eguagliamo il prodotto di tutti i termini della prima colonna al prodotto di tutti i termini della seconda, omettendo le denominazioni, ed avremo

$$4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45 = 17 \times 50 \times 63 \times 260 \times x;$$

che è l'eguaglianza trovata di sopra da cui si è ricavato il valore di x .

Quindi, ecco la regola da stabilirsi. *Scrivete i dati rapporti di equivalenza uno sotto l'altro in modo che il secondo termine di ciascun rapporto sia della stessa specie di unità del primo termine del rapporto seguente, e continuate così sino all'ultimo rapporto di cui il secondo termine dovrà rappresentare la quantità incognita, ed essere della stessa specie di unità del termine iniziale; dopo di ciò dividete il prodotto di tutti i primi termini per quello di tutti i secondi termini esclusa la quantità che si cerca, ed il quoziente esprimerà il valore di quest'ultima quantità.*

Facciamo un'altra applicazione di questa regola. Si domanda il rublo d'argento di Russia che parte è del ducato napolitano, sapendosi che 86 ducats equivalgono a 425 lire austriache, 42 lire austriache a 43 lire toscane, 134 lire toscane a 21 scudi romani e 50 scudi romani a 67 rubli di Russia? Si scriveranno i rapporti come segue,

$$\begin{aligned} 86 \text{ ducats} &= 425 \text{ lir. aust.} \\ 42 \text{ lir. aust.} &= 43 \text{ lir. tosc.} \\ 134 \text{ lir. tosc.} &= 21 \text{ scudi rom.} \\ 50 \text{ scudi rom.} &= 67 \text{ rub. di Rus.} \\ 1 \text{ rublo} &= x \text{ ducats} \end{aligned}$$

da quali si ricaverà immediatamente ,

$$x = \frac{86 \times 42 \times 134 \times 50}{425 \times 43 \times 21 \times 67} = \frac{2.43 \times 2.1 \times 2.67 \times 2.25}{17.25 \times 43 \times 21 \times 67} \\ = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{17} = \frac{16}{17} = 0,9412 \text{ duc.}$$

Un rublo vale dunque *grana* $94\frac{12}{100}$.

Dal ragionamento che qui sopra ci ha guidati a stabilire le proporzioni (A) possiamo conchiudere in generale che, *se due quantità omogenee ed eguali sono espresse con due numeri diversi, le unità cui questi numeri si riferiscono, dovendo essere disuguali, la maggiore di esse appartiene al numero minore e viceversa; e la ragione di una all'altra è inversa della ragione de' numeri corrispondenti, considerati astratti.* Così nell'esempio precedente 86 ducati essendo eguali a 425 lire austriache, la lira è minore del ducato nel rapporto di 86 a 425, e quindi una lira è $\frac{86}{425}$ di ducato, ed un ducato è $\frac{425}{86}$ di lira. Similmente dalla relazione fra le lire austriache e le toscane si ricava che una lira toscana è $\frac{4}{3}$ di lira austriaca, cioè $\frac{4}{3}$ di $\frac{86}{425}$ di ducato; ed andando avanti, poichè uno scudo romano è $\frac{2}{3}$ di lira toscana, corrisponderà a $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{3}$ di $\frac{86}{425}$ di ducato; e finalmente il rublo, che è $\frac{5}{7}$ di scudo romano equivarrà a $\frac{5}{7}$ di $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{3}$ di $\frac{86}{425}$ di ducato. E riducendo ad una frazione semplice questa frazione di frazioni (§. 28) si conchiuderà che il rublo è $\frac{50 \times 134 \times 42 \times 86}{67 \times 21 \times 43 \times 425}$ del ducato, al quale risultamento, identico del precedente, siamo pervenuti per una via alquanto diversa.

§. 74.

Della regola di compagnia.

La regola di *compagnia*, o di *società*, ha per oggetto di *dividere convenientemente il guadagno o la perdita di una società commerciale fra le persone che vi hanno preso parte.* Ecco alcuni problemi di questo genere.

I. Tre negozianti hanno riuniti i loro capitali in commercio; il primo ha posto 2500 ducati, il secondo 1800, il terzo 4200. Dopo qualche tempo vogliono dividere fra loro il guadagno ottenuto, che fu di 5720 ducati; si domanda quanto spetta a ciascuno?

Il capitale totale posto in commercio è $2500 + 1800 + 4200 = 8500$ ducati, ed è chiaro che, se uno de' negozianti avesse posta la metà di questo capitale, gli spetterebbe la metà del frutto che ha prodotto, se avesse posta la terza parte del capitale gli spetterebbe la terza parte del guadagno, etc: dunque il guadagno totale deve contenere il guadagno particolare di ciascun socio tante volte, quante il capitale totale contiene il particolare. Quindi il guadagno particolare di ogni socio si troverà per mezzo della seguente proporzione

*Il capitale totale sta al capitale particolare come
il guadagno totale sta al guadagno particolare ,*
e si avrà

$$8500 : 2500 :: 5720 : x = 1682\frac{6}{17}$$

$$8500 : 1800 :: 5720 : y = 1211\frac{8}{17}$$

$$8500 : 4200 :: 5720 : z = 2826\frac{6}{17}$$

Somma de' guadagni particolari.. 5720

Per riprova dell'operazione la somma dei guadagni particolari deve uguagliare il guadagno totale, come di fatto avviene.

Le proporzioni dalle quali si sono ricavati i guadagni particolari x, y, z , hanno gli stessi antecedenti, e però i conseguenti saranno proporzionali (§. 58); cioè sarà

$$2500 : x :: 1800 : y :: 4200 : z, \text{ e permutando ,}$$

$$2500 : 1800 : 4200 :: x : y : z$$

Da qui apparisce che *la regola di società consiste nel dividere un numero dato, per esempio 5720, in più parti, x, y, z , le quali serbino fra loro lo stesso rapporto che hanno uno rispetto all'altro alcuni numeri dati, come 2500, 1800, 4200.* Per trovare ciascuna delle parti domandate serviranno le proporzioni seguenti; *la somma de' dati numeri proporzionali, 2500, 1800, 4200, o per brevità, 25, 18, 42, sta al primo di essi, 25, come il numero da dividersi, 5720, sta alla prima parte, e similmente per le altre parti.*

Sotto questo aspetto più generale la regola di compagnia ha molte importanti applicazioni. Essa serve a regolare la distribuzione delle contribuzioni, o dazi che impone il Governo, i quali debbono per giustizia gravitare sullo proprietà in proporzione del loro valore: e similmente la ripartizione di una spesa qualunque fra più individui, o comunità, in proporzione de' mezzi di ciascuno, si riduce sempre a *dividere un dato numero in parti proporzionali ad altri numeri dati.* A ciò si riduce spesso anche la partizione di una somma con date condizioni. Per esempio, *deve dividersi la somma di 4400 ducati fra 4 persone in modo che la porzione della prima sia doppia di quella della seconda, la porzione della terza sia $\frac{3}{2}$ di ciò che spetta alla prima, e la quarta abbia quanto la prima e la terza insieme; si domanda quanto spetta a ciascuna?* Prendendo per unità la parte della seconda persona, quella della prima sarà espressa da 2, e quella della terza, dovendo essere $\frac{3}{2}$ di 2, sarà dinotata da 3; ed infine la porzione della quarta persona, che deve avere quanto la prima e la terza insieme, sarà espressa con 5. Il numero 4400 dovrà dunque dividersi in quattro parti proporzionali ai numeri 2, 1, 3, 5; onde le quattro persone avranno rispettivamente 800, 400, 1200, 2000.

Con un procedimento analogo si risolverà quest'altro problema. *Una persona lascia morendo quattro eredi e dispone che la sua proprietà di 45000 ducati sia divisa fra essi in modo che il primo ne abbia la metà, il secondo la terza parte, il terzo due quinti, ed il quarto un sesto; si domanda quanto spetta a ciascuno?* Essendo la somma delle frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$, maggiore dell'unità, è chiaro che la volontà del testatore non può essere adempita letteralmente, giacchè l'eredità non basterebbe neppure per le tre prime porzioni; ma riflettendo all'intenzione che egli ebbe nel fare quella

disposizione così irregolare, si sceglie che volle distribuire la sua proprietà fra i quattro eredi in modo che le loro parti fossero proporzionali alle frazioni: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$; il problema si riduce dunque a dividere il numero 45000 in quattro parti che stiano fra loro come le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, ovvero come le altre $\frac{15}{30}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{12}{30}$, $\frac{5}{30}$, e quindi come i numeri 15, 10, 12, 5. Fatto il calcolo, le quattro porzioni sono 16071,43; 10714,29; 12857,14; 5357,14.

Spesso i negozianti che formano società di commercio non impiegano i loro capitali per lo stesso tempo, ed allora la distribuzione del guadagno deve farsi avendo riguardo a questa circostanza, come nell'esempio seguente, e la regola di compagnia diessi *composta*.

II. Tre negozianti hanno posto in società i loro capitali e ve li hanno tenuti per tempi diversi, cioè il primo ha messi 1800 ducati per 6 anni, il secondo 2500 per 4 anni ed il terzo 4200 per 3 anni; si domanda come dovrà ripartirsi il guadagno di 5720 ducati fatto dalla società?

Osserviamo che il frutto di un capitale di 4200 ducati per 3 anni equivale al frutto di un capitale triplo per un solo anno, e similmente il frutto di D.^o 1800 per 6 anni eguaglia quello di 10800, sestuplo di 1800, per un anno, ed il frutto di D.^o 2500 per 4 anni è lo stesso di quello di 10000 ducati per 1 anno. Dunque ai capitali proposti impiegati per tempi diversi si potranno sostituire gli altri 12600, 10800, 10000, impiegati per lo stesso tempo, e la questione sarà ridotta a dividere il numero 5720 in parti proporzionali a questi numeri; e siccome essi si ottengono moltiplicando i primi capitali pei tempi corrispondenti, così la proporzione generale che risolve i problemi di società composti è la seguente.

La somma de' prodotti dei capitali proposti pei tempi corrispondenti sta al guadagno totale come uno di quelli prodotti sta al guadagno particolare cui ha relazione.

Allo stesso risultamento si può giungere riflettendo che il guadagno di ogni socio deve esser proporzionale al suo capitale non meno che al tempo che l'ha tenuto impiegato, cioè deve essere di *ragion composta* del capitale e del tempo. La ragione del guadagno del primo socio al guadagno del secondo sarà dunque composta delle ragioni 1800 : 2500 e 6 : 4, vale a dire sarà quella de' prodotti $1800 \times 6 : 2500 \times 4$ (§. 64); e similmente i guadagni del secondo e del terzo socio saranno in ragione de' prodotti 2500×4 , 4200×3 , onde i tre guadagni dovranno essere proporzionali ai prodotti 1800×6 , 2500×4 , 4200×3 , come sopra.

Questa maniera di considerare la regola di società composta può avere un uso molto esteso. Per esempio, i proprietari di più fondi limitrofi variamente coltivati, volendo garantire la loro rendita dalla mancanza eventuale delle raccolte, convengono di porla in comune e dividerne ogni anno la totalità in proporzione della estensione de' fondi e della fertilità del suolo; le ampiezze de' fondi sono proporzionali ai numeri 12, 15, 8, 27... e le fertilità, dedotte dal confronto delle rendite ottenute per molti anni ne' diversi fondi da eguali porzioni di terreno, sono proporzionali ai numeri 25, 16, 17, 21...; si domanda che parte spetterà a ciascun socio

della rendita totale di D. 12520 data dai fondi in un certo anno? La parte di ciascun socio è tanto più grande quanto più esteso e fertile è il suo fondo; quindi la ragione di una ad un'altra porzione di rendita deve comporsi della ragione delle ampiezze e di quella delle fertilità, cioè deve esser la ragione de' prodotti delle ampiezze per le fertilità. Laonde, per distribuire la rendita secondo il convenuto, bisognerà dividere il numero 12520 in parti proporzionali ai prodotti 12×25 , 15×16 , 8×17 , 27×21

Negli esempi precedenti le cause dalle quali dipende la quantità della parte di ciascun socio concorrono insieme ad accrescerla o diminuirli, ma potrebbe accadere che una causa tendesse ad accrescerla ed un'altra a diminuirli come nei seguenti problemi.

Deve ripartirsi la spesa di una strada fra tutti i Comuni che ne godono, e ciascun Comune deve contribuire in ragione de' propri mezzi e della utilità che ritrae dalla strada; essendo questa tanto più utile ad un Comune quanto più vicina, si vuol conoscere in qual modo dovrà determinarsi la rata di ciascun Comune. Supponendo che le rendite de' diversi Comuni sieno proporzionali ai numeri 12, 28, 48, 50..., e le rispettive distanze dalla strada siano 12, 16, 21, 18..., è chiaro che la rata di ciascun Comune è maggiore quanto più grande è la sua rendita, e quanto più breve è la distanza che lo separa dalla strada; dunque la distribuzione della spesa dovrà farsi in ragion composta della ragione diretta delle rendite e della inversa delle distanze, e siccome la ragione inversa di due numeri 12, 16 può rappresentarsi collo frazioni $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$ (§. 56), così in vece d'introdurre le distanze nella composizione delle ragioni s'introduurranno le loro espressioni reciproche $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{18}$... Le rate da pagarsi dai diversi comuni saranno quindi proporzionali ai prodotti di queste frazioni per le rendite corrispondenti, cioè saranno proporzionali alle frazioni $\frac{12}{288}$, $\frac{28}{448}$, $\frac{48}{441}$, $\frac{50}{324}$..., ed in fatti si sa altronde che i valori delle frazioni sono in ragion composta della diretta de' numeratori e della inversa de' denominatori (§. 64). La spesa della strada sarà perciò divisa in parti proporzionali alle frazioni $\frac{12}{288}$, $\frac{28}{448}$, $\frac{48}{441}$, $\frac{50}{324}$, ovvero alle altre $\frac{252}{648}$, $\frac{441}{288}$, $\frac{441}{567}$, $\frac{576}{864}$, o finalmente ai numeri 231, 441, 576, 700.

Doendosi in molta fretta riattare una fortezza si distribuiscono i lavori a diversi appaltatori, e rispetto al pagamento si conviene che, terminati i lavori, si valuteranno, e la totalità del prezzo sarà distribuita fra gli appaltatori in ragione della quantità di lavoro fatto eseguire da ciascuno, non meno che della qualità, e della sollecitudine con la quale fu portato a termine; si domanda come dovrà regolarsi la distribuzione? Le quantità di lavoro siano proporzionali ai numeri 20, 30, 15, 54 etc., o le qualità ai numeri, 25, 27, 28, 24..., i quali rappresentano i prezzi di una eguale porzione di lavoro eseguita dai diversi appaltatori, perchè quando le quantità sono eguali i prezzi sono proporzionali alle qualità; i tempi impiegati nell'esecuzione dei lavori dagli appaltatori siano rispettivamente 10, 15, 9, 36..., dimodochè, dividendo questi tempi per le quantità di lavoro, i tempi impiegati nell'eseguire l'unità di lavoro saranno, $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{36}{54}$, ovvero $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. Siccome la rata di ciascun appaltatore deve esser maggiore in ragione della maggior quantità del lavoro, della miglior qualità e del minor tempo impiegato, così le ragioni della quantità e della qualità saranno dirette, e la ragione del tempo inversa; quindi nella composizione delle ragioni si sostituiranno ai tempi le quantità reciproche 2, 2, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, ed il prezzo totale dei lavori si dividerà in parti proporzionali ai prodotti, $20 \times 25 \times 2$, $30 \times 27 \times 2$, $15 \times 28 \times \frac{4}{3}$, $54 \times 24 \times \frac{3}{2}$, ovvero ai numeri 250, 405, 175, 486.

*

Della proporzione aritmetica.

Abbiamo veduto (§. 54) che per *rapporto* o *ragione aritmetica* di due quantità omogenee s'intende la loro differenza; così il rapporto aritmetico de' due numeri 5 e 3, è $5 - 3$, ossia 2.

Analogamente a ciò che si è detto delle proporzioni geometriche, si chiama *proporzione aritmetica l'eguaglianza di due ragioni aritmetiche*. Per esempio i quattro numeri 5, 3, 6 e 4 sono in proporzione aritmetica, perchè la differenza de' due primi eguaglia la differenza degli altri due. La proporzione aritmetica si scrive così,

$$5 : 3 : 6 : 4$$

e si legge come la proporzione geometrica, *5 sta a 3 come 6 sta a 4*.

In ogni proporzione aritmetica la somma dei termini estremi è eguale a quella de' termini medii. Infatti, prendendo per esempio la proporzione $5 : 3 : 6 : 4$, essa può cambiarsi nell'eguaglianza $5 - 3 = 6 - 4$, e se ai resti eguali delle due sottrazioni $5 - 3$, $6 - 4$ si aggiunga la somma $3 + 4$, si otterrà una nuova eguaglianza $5 - 3 + 3 + 4 = 6 - 4 + 3 + 4$, la quale, riflettendo che i numeri 3, 4 sottratti e poi aggiunti svaniscono, diviene $5 + 4 = 6 + 3$; e siccome i numeri 5, 4 sono i termini estremi della proporzione e gli altri 3, 6 sono i termini medii, rimane dimostrato il teorema enunciato.

Dati tre termini di una proporzione aritmetica si può trovare il quarto, poichè se il termine incognito è uno degli estremi, si otterrà togliendo dalla somma dei dati medii l'altro estremo conosciuto, e se il termine incognito è uno de' medii si calcolerà togliendo dalla somma de' due estremi dati il medio conosciuto.

Tre numeri sono in proporzione aritmetica quando la differenza tra il primo ed il secondo eguaglia la differenza tra il secondo ed il terzo. Allora la proporzione aritmetica, analogamente alla proporzione continua geometrica, si scrive così $\div 5 : 3 : x$, ed il secondo numero dicesi *medio aritmetico*. È chiaro che in tal caso la somma de' termini estremi eguaglia il doppio del medio, onde il medio aritmetico si ottiene prendendo la metà della somma de' termini estremi (*).

(*) Le denominazioni di proporzione *geometrica* e proporzione *aritmetica* si sono credute improprie da alcuni matematici, poichè delle proporzioni dette *geometriche* tratta pure, ed in principal modo, l'*Aritmetica*. Hanno quindi proposto di conservare il nome di proporzione soltanto alla geometrica, e chiamare *equidifferenza* la proporzione aritmetica. Ma riflettendo all'analogia che vi è fra le due proporzioni, e più ancora fra le *progressioni* geometriche ed aritmetiche, pare che non possa negarsi all'*equidifferenza* il nome di proporzione, e sembra più propria la distinzione che altri fanno di *proporzione per differenza*, e *proporzione per quoziente*; se non che le usatissime denominazioni di *medio aritmetico* e *medio geometrico*, non si trovano d'accordo con tutte queste modificazioni dell'antico linguaggio, e le frasi equivalenti di *medio per differenza*, o *differenziale*, e *medio per quoziente*, non sono usate quasi da alcuno, e non sembrano molto soddisfacenti.

Per analogia si chiama *medio* o *media aritmetica* di più quantità, la somma delle medesime divisa pel loro numero; così il

medio aritmetico de' numeri 4, 7, 5, 8, è $\frac{4+7+5+8}{4} = 6$.

Se le quantità di cui deve prendersi il medio sono distribuite in più gruppi di quantità eguali, l'operazione da eseguirsi per ottenerne la quantità media può essere abbreviata; per esempio dovendo prendere il medio di 4, 4, 4; 7, 7, 7; 5, 5; 8, 8, 8, 8, invece di fare la somma di tutti questi numeri, si aggiungeranno fra loro i prodotti 3.4, 3.7, 2.5, 4.8, e la somma ottenuta si dividerà per la somma de' moltiplicatori 3, 3, 2, 4, onde il medio

aritmetico sarà $\frac{3.4+3.7+2.5+4.8}{3+3+2+4} = \frac{75}{12} = 6,25$. Dimodochè

se si abbiano più quantità omogenee A, B, C. etc, e la prima sia ripetuta *m* volte, la seconda *n* volte, la terza *p* volte etc, la media aritmetica di tutte sarà espressa generalmente come segue,

$$\text{media aritmetica} = \frac{m.A + n.B + p.C + \dots}{m + n + p + \dots}$$

Questo modo di determinare il medio aritmetico serve a trovare il risultamento finale di molte esperienze, od osservazioni, dirette ad ottenere con gran precisione la misura di una certa quantità, o il suo rapporto con altra quantità conosciuta. Eccone qualche esempio.

Occorrendo di conoscere con grande esattezza la lunghezza di una strada limitata fra due punti fissi, se n'è ripetuta più volte la misura; i risultamenti di queste esperienze non sono stati identici, ma due volte la lunghezza della strada si è trovata di palmi 2450,65, altre tre volte di pal. 2450,50, ed un'ultima volta di pal. 2451,00. Le differenze fra questi numeri dimostrano abbastanza che alcuni di essi, e forse tutti, contengono un piccolo errore, il quale potrebbe essere *in più* per taluni, e per altri *in meno*. Ad attenuare questo errore il miglior mezzo è quello di prendere il medio aritmetico di tutte le misure ottenute, che meritano eguale fiducia, per essersi usata sempre la stessa attenzione e diligenza; in tal guisa gli errori in più potranno distruggere in tutto o in parte gli errori in meno, e ciò che rimane trovandosi egualmente ripartito sopra ciascuna misura, diverrà insignificante, e tanto più quanto maggiore sarà il numero delle misure. Quindi la lunghezza più probabile della strada si otterrà dall'espressione

$$\frac{2 \times 2450,65 + 3 \times 2450,50 + 2451,00}{2 + 3 + 1} = 2450,633.$$

Vuol determinarsi con gran precisione il rapporto fra il *rotolo* di Napoli ed il *chilogrammo* francese; paragonati i due pesi con esattissime bilance, si è trovato due volte il rotolo equivalente a 0^{re} 89099, tre volte a 0^{re} 891001,

una volta a $0^{\text{a}}, 890995$, e quattro volte a $0^{\text{a}}, 890998$. Dall'insieme di tutte le esperienze risulta perciò che il rotolo espresso in parti del chilogrammo è

$$\frac{2 \times 0,890995 + 3 \times 0,891001 + 0,890995 + 4 \times 0,890998}{2+3+1+4} = 0^{\text{a}}, 890997.$$

§. 76.

Regola di Alligazione.

La regola data qui sopra per trovare il medio aritmetico, quando si applica agli usi della società, si chiama *regola di alligazione*. Eccone alcuni esempi.

1. Un mercante ha comprato più qualità di vini, cioè

130 bottiglie a 10 grana l'una

75 a 15

231 a 12

27 a 20 ;

esso le mescola e vuol conoscere quanto gli costa una bottiglia della mescolanza.

È chiaro che lo

130 bottiglie a 10 grana l'una costano $130 \times 10 = 1300$,

75 a 15 $75 \times 15 = 1125$

231 a 12 $231 \times 12 = 2772$

27 a 20 $27 \times 20 = 540$

dunque 463 bottiglie di vino costano in tutto $\overline{5737}$

E però dividendo il prezzo totale del vino pel numero totale delle bottiglie, si avrà il prezzo medio di una bottiglia, o sia il costo di una bottiglia della mescolanza, che sarà grana 12,39.

Il prezzo del miscuglio, o *lega*, di più metalli fusi insieme si ottiene nello stesso modo; anzi la *regola di alligazione* ha preso in origine il suo nome dalla *lega* de' metalli.

L'oro e l'argento non si trovano mai puri in commercio ma sempre mescolati con una piccola quantità di metallo più vile, come il rame, ed il rapporto fra il peso della parte di metallo fino contenuta nel miscuglio, ed il peso totale di questo, si chiama *titolo*; così una verga di metallo fino combinato con rame per $\frac{1}{10}$ del peso totale si dice *al titolo di* $\frac{9}{10}$, e se la porzione di rame è di $\frac{9}{1000}$ soltanto la verga è al titolo di $\frac{999}{1000}$ etc. Il *titolo* delle monete d'oro o di argento ha lo stesso significato. Nel seguente problema si determina il titolo di una lega di più masse dello stesso metallo a diversi titoli.

II. Si è ritirata dal commercio una quantità di monete vecchie per coniarne delle nuove; ed a tal oggetto si sono fusi insieme 23 rotoli di monete di argento al titolo di 0,825, 14 rotoli di monete dello stesso metallo al titolo di 0,910, e 19 rot. al titolo di 0,845, si domanda il titolo della *lega*. Poichè ogni moneta di argento al primo titolo contiene di metallo fino $\frac{825}{1000}$ del proprio peso, 23 rotoli ne conterranno $\text{rot. } 23 \times \frac{825}{1000}$ e ragionando similmente per gli altri due pesi di monete si avrà che,

23 rot. a 0,825 contengono di metallo fino $\text{rot. } 23 \times 0,825 = 18,975$

14 rot. a 0,910 $14 \times 0,910 = 12,740$

19 rot. a 0,845 $19 \times 0,845 = 16,055$

56 rot. di mescolanza contengono di metallo fino 47,770

e siccome il titolo non è che il rapporto del peso della quantità di metallo fino al peso totale, il titolo della *lega* sarà $\frac{47,77}{56} = 0,853$.

Si avverte che spesso abusivamente si chiama *lega* la quantità di metallo ordinario combinata col metallo fino in una verga o in una moneta.

DELLE MISURE.

§. 77.

Delle misure della città di Napoli prima della legge de' 6 Aprile 1840.

Tutte le contrattazioni nella società sono regolate per mezzo di *moduli* o *campioni* che, considerati come unità, servono a valutare in numeri le quantità dei generi che si vogliono vendere o comprare, e diconsi *misure*. Così volendo comprare una certa quantità di panno, dovrà essa valutarsi per mezzo di una lunghezza presa per unità, per esempio il *palm*; affinchè stabilito il prezzo di un palm di panno, possa subito conoscersi il costo della quantità di panno che si desidera, come di palmi $3\frac{3}{4}$. Le misure sono di varie specie secondo l'uso al quale vengono destinate, e si distinguono principalmente in

Misure di lunghezza

Misure itinerarie

Misure superficiali o agrarie

Misure di capacità pe' liquidi e per gli aridi

Misure di solidità

Pesi.

Le misure usate dalla Città di Napoli, prima dell'ultima legge dei 6 Aprile 1840, sono le seguenti.

L'unità lineare, o sia di lunghezza si chiama *palmò*. Il palmò si divide in 12 oncie, e l'oncia in 5 minuti. Si chiama poi *canna* una lunghezza di 8 palmi, e *pertica* (per uso degli Architetti) una lunghezza di 10 palmi.

L'unità itineraria, ossia quella che serve a valutare le distanze fra i diversi luoghi e città, si chiama *miglio* e contiene 1000 *passi*, ognuno de' quali vale 7 palmi, dimodochè il miglio contiene 7000 palmi.

Il palmò napolitano, secondo la sua antica definizione di *settemillesima parte del miglio*, equivale a $\frac{7000}{12 \times 5} = \frac{7000}{60}$ di metro ossia a millimetri 264,55 (§.80), e sembra maggiore del palmò in uso, prima della legge del 6 Aprile, per $\frac{1}{1000}$ circa della sua lunghezza. Questa differenza, assolutamente insensibile negli usi comuni della società, perchè inferiore agli errori provenienti dalla grossolana costruzione delle misure adoperate in commercio e dal modo di servirsene, deve considerarsi come un'alterazione introdotta ne' campioni dal tempo, per la cattiva maniera di conservarli e di rinnovarli quando erano logori; il sig. Colonnello Visconti ne ha dato luminosa pruova mostrando che il tomolo, il barile, lo stajo, ed il rotolo derivano con rapporti semplicissimi, non già dal palmò scorretto, ma dal palmò rettificato di millimetri 264,55, onde questo dovette essere il vero palmò originale che servi di base al sistema delle nostre misure. Nel 1811 una commissione di dotti incaricata del paragone delle misure napolitane con quelle del sistema metrico francese giudicò il palmò di millimetri 263,67, servendosi di un'antica spranga di ferro che si conservava come modulo in Castelcapuano. Questa spranga più non esiste, ed il modulo col quale la città di Napoli regolava le misure del commercio, prima della legge del 6 Aprile, consisteva in un'asta di stadera che fu misurata diligentemente dal Colonnello Visconti e, per quanto lo permettesse l'imperfetta sua costruzione, fece conoscere che il palmò era di millimetri 264, e non più di millimetri 263,67. Ma la mancanza di buoni campioni e di una legge che stabilisse invariabilmente la vera quantità delle misure ha dovuto dare origine per lo addietro a differenze anche maggiori, poichè autorevoli scrittori hanno in varie epoche assegnate al palmò le lunghezze di 264 millimetri, di 263,7, di 264, di 264,5 di 265,3, di 266,7. Per la qual cosa prima della legge del 6 Aprile non si aveva alcuna precisa cognizione del palmò, e male si appongono coloro che vorrebbero dare al palmò una lunghezza sicura innanzi alla lodata legge, considerandolo di millimetri 263,67, perchè tale era nel 1811, mentre prima o dopo quell'epoca fu sicuramente diverso. E non solo variava il palmò per la imperfezione e instabilità de' campioni, ma variava pure in commercio per la imperfettissima maniera di *campionare* le misure, onde molto differenti fra loro erano le *mezzecanne* usate da' mercanti, quantunque tutte *bollate* (*).

L'unità di superficie, ossia quella che serve a valutare l'estensione o grandezza de' terreni si chiama *moggio*, il quale ha 30 *passi* di lunghezza ed altrettanti di larghezza, essendo ogni passo lungo palmi $7\frac{1}{2}$. Il passo che regola le misure agrarie è dunque diverso dal passo itinerario, che si compone di soli 7 palmi.

(*) È curioso, fra molti altri casi fortuiti, che un'antichissima *pertica* di 10 palmi che si conservava nel R. Ufficio topografico di Napoli, misurata accuratamente col nuovo ammirabile campione ricevuto da Londra, è stata trovata identica alla nuova *canna* di 10 palmi stabilita dalla legge del 6 Aprile 1840 (§. 80).

Le misure pe' liquidi sono diverse per l'olio, o pel vino. L'unità di misura dell'olio è lo *stajo* che corrisponde ad un peso di *rotoli* $10 \frac{1}{2}$; esso si divide in 16 *quarti*, ed ogni quarto si divide in 6 *misurelli*. Sedici staja formano una *salma*, che corrisponde perciò al peso di rot. $165 \frac{1}{2}$. L'unità di misura del vino è il *barile* che contiene 60 *caraffe*. Dodici barili formano una *botte*, e due botti formano un *carro*.

L'unità di misura per gli aridi, come il grano e le biade di ogni genere, è il *tomolo*, che si divide in 4 *quarte*, o in 24 *misure*.

L'unità di misura per valutare la quantità della legna da bruciare è un volume (parallelepipedo) lungo 8 palmi, largo 8 palmi ed alto 4 palmi, detto *canna da legna*.

La *canna di costumanza*, usata dagli architetti per misurare le fabbriche, è un volume (parallelepipedo) lungo 8 palmi, largo 8 palmi ed alto 2 palmi.

L'unità di peso è il *rotolo* per la maggior parte de' generi che si contrattano a peso; il rotolo si divide in 1000 *trappesi* ed equivale ad *once* $33 \frac{1}{3}$, dimodochè 100 once formano 3 rotoli. Cento rotoli formano un *cantajo*.

Per alcuni generi si usa la *libbra* composta di 12 once (eguali a quelle del rotolo); l'oncia si divide in 10 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli* o trappesi (eguali a quelli del rotolo), il trappeso in 20 *acini* o *grani*.

La calce si valuta con una unità detta in commercio *peso*, che equivale a 40 rotoli.

§. 78.

Condizioni generali di un sistema metrico.

Se i pesi e le misure fossero gli stessi presso tutte le nazioni, qualunque potesse essere il loro ordinamento, sarebbe stranezza il farvi la più piccola innovazione, e tutta la cura de' governi dovrebbe anzi consistere nel mantenerli immutabili. Ma disgraziatamente le misure variano da uno Stato ad un altro non solo, ma da un comune ad un altro dello stesso Regno, e questa varietà è di così grave danno al commercio, che in tutti i tempi i governi illuminati hanno procurato di ridurre ad un sistema unico almeno i pesi e le misure de' popoli soggetti alla loro amministrazione, ordinandolo in modo che fosse in chiara e facile relazione con quelli delle altre nazioni. Discutiamo brevemente le condizioni alle quali deve adempire un sistema di pesi e misure per corrispondere allo scopo cui è destinato, cioè di assicurare e promuovere il commercio interno ed esterno di un paese.

La buona fede delle contrattazioni esige che le misure ed i pesi in esse adoperati siano pienamente conosciuti da' contraenti, e che costoro abbiano inoltre la piena certezza della loro invariabilità. Un forestiere che non conoscesse la precisa quantità del *tomolo*, o che potesse dubitare che il tomolo attuale fosse diverso da quello in altra epoca a lui noto, non si deciderebbe certo facilmente a commerciare di cereali col nostro paese. La prima ed indispensabile condizione che devono avere i pesi e le misure di uno Stato è perciò quella di essere legalmente stabiliti, e determinati con somma precisione nella loro quantità per mezzo di campioni ottimamente costrutti, e sulla conservazione de' quali vegli la pubblica autorità.

I pesi e le misure di uno Stato non formano però un *sistema*, se non derivano tutti con rapporti semplici e chiari dalla unità di misura lineare. Questa *seconda* condizione, quantunque non essenziale come la prima, è necessaria perchè agevola sommanente la perfetta conoscenza delle misure, e la rettificazione e costruzione de' campioni, che si alterano o logorano col tempo. Sarà facile, per esempio, a chiunque di formarsi una esatta idea del *tomolo* napolitano se si dirà, *il tomolo è tre palmi cubici*, cioè un parallelepipedo che ha un palmo di lunghezza un palmo di larghezza e tre palmi di altezza (pag. 141); ma non così se si dirà, *il tomolo è tre palmi cubici e $\frac{3}{4}$ di palmo cubico*. Similmente la costruzione o la rettificazione di un campione del tomolo sarà immensamente più facile, se si tratterà di farlo eguale a tre palmi cubici piuttosto che a palmi cubici $3\frac{3}{4}$: e sarà dato anche ad ognuno di poter verificare la giustezza delle misure in commercio so per legge il loro valore è determinato mediante rapporti molto semplici con l'unità lineare, siccome può dirsi del tomolo equivalente a 3 palmi cubici. Tutte queste circostanze rendono facili e sicure le contrattazioni, e fanno che le misure corrispondano all'oggetto per cui furono stabilite.

Un *sistema* di pesi e misure può fondarsi sopra una unità lineare che abbia un rapporto semplice con altra misura molto conosciuta nell'estero, come il *metro* o la *tesa*, piuttostochè sopra una unità puramente arbitraria e convenzionale. Questa *terza* condizione di cui può godere un sistema di pesi e misure, quantunque non essenziale come la prima e meno importante della seconda, non cessa però di avere una grande utilità nel commercio esterno; perocchè stabilisce una facile e chiara relazione fra le misure di un pacco, e quelle delle altre nazioni, e quindi assicura ed agevola il commercio fra Stato e Stato. Che se inoltre l'unità lineare fosse aliquota di qualche misura itineraria, dipendente con chiaro rapporto dalla grandezza della Terra che abitiamo, allora il *sistema metrico* appoggiandosi ad un modello invariabile preso nella natura, avrebbe il vantaggio di legare fra loro con progressiva derivazione tutte le misure grandi e piccole, servirebbe agli usi comuni non meno che agli usi scientifici, e specialmente della Geografia, della Geodesia, e della Statistica, ed acquistando così maggiore stabilità, se pure col volger del tempo venisse alquanto a variare, potrebbe esser ricondotto facilmente ai suoi veri principii.

Finalmente la *quarta* ed ultima condizione di un sistema metrico potrebbe essere la divisione e suddivisione *decimale* de' pesi e delle misure. Questa condizione rende più facili i calcoli del commercio e sotto tale rapporto è molto da pregiarsi, ma è evidente che non ha nè può avere l'importanza delle precedenti; onde s'ingannano alcuni che nella divisione decimale fanno quasi tutta consistere la perfezione di un sistema metrico. Aggiungasi che la divisione decimale si oppone spesso alle abitudini del popolo nel piccolo commercio, le quali, senza un potente motivo di bene pubblico, non vogliono essere contrariate. E questa opinione è così giusta, che per essa, come accenneremo fra poco, non ha potuto sostenersi la nuova divisione decimale del *cerchio* (*), malgrado che servisse di fondamento al sistema metrico decimale francese, opera altronde perfetta nel suo genere.

(*) Si chiama *cerchio* una figura geometrica terminata da una linea curva che dicasi *circonferenza*, di cui ogni punto è egualmente distante da un punto interno della figura detto *centro*; la forma del cerchio è quella che nel linguaggio comune si chiama *rotonda*. La circonferenza del cerchio si suppone divisa in parti uguali chiamate *gradi*, il grado si divide in *minuti*, ed il

Ritassando, siccome i pesi e le misure non possono essere gli stessi presso tutte le nazioni, è necessario che siano uniformi almeno in tutto uno Stato; le misure di uno Stato riusciranno poi di maggior vantaggio al suo commercio interno ed esterno, 1.° allorchè saranno delinite o mantenute legalmente e non per semplice tradizione, 2.° se deriveranno tutte dall'unità lineare con rapporti semplici e chiari, 3.° se questa unità principale venga, in certo modo, a contatto con quelle delle altre nazioni, serbando un rapporto semplice e chiaro con qualche misura generalmente conosciuta, e quando fosse possibile, anche collo misure terrestri, 4.° se la divisione e suddivisione delle misure sarà decimale.

§. 79.

Del sistema metrico decimale francese.

Verso la fine del passato secolo il governo di Francia incaricò una commissione di scienziati della riforma delle misure di quel Regno, il quale forse più degli altri paesi di Europa abbondava di misuro di ogni genere tutte diverse fra loro. Quei grandi nomini, non contenti di dare alle misure francesi le prime due indispensabili condizioni di cui si è parlato nel §. precedente, per soddisfare alla terza, si occuparono di stabilire l'unità lineare in modo da renderla comune non solo alla Francia ma, se fosse stato possibile, anche a tutte le altre nazioni; ed a tal fine, in vece di desumerla da qualche misura lineare già esistente, e molto conosciuta come la *tesa*, immaginarono di derivarla immediatamente dalla lunghezza del quarto di *meridiano terrestre*, siccome da un campione naturale e comune a tutti, di maniera che non venisse offeso nella scelta l'amor proprio di alcuna nazione (*). Per dare al sistema metrico ogni perfezione, fu adottata pure la divisione e suddivisione decimale delle misure, onde la misura fondamentale detta *metro*, (misura per eccellenza) risultò dalla divisione della lunghezza del *quadrante terrestre* in 10 000 000 di parti eguali.

Dall'unità di misura lineare, chiamata *metro*, sono nel sistema metrico francese ricavate tutte le altre misure, itinerarie, di superficie, di capacità, e di peso; e per indicare i multipli ed i sottomultipli decimali delle misure si fece uso di una nomenclatura sistematica derivata dal greco e dal latino come, *miria*, *chilo*, *ecato*, *deca*, *deci*, *centi*, *milli*, le quali voci equivalgono rispettivamente a *decina di migliaja*, *migliajo*, *centinajo*, *decina*, *decimo*, *centesimo*, *millesimo*. Tutti i particolari del sistema metrico decimale francese veggonsi registrati nel seguente quadro.

minuto in *secondi*. Da tempo immemorabile la circonferenza del cerchio si è divisa in 360 gradi, il grado in 60 minuti ed il minuto in 60 secondi. La quarta parte della circonferenza, che contiene 90 gradi, si chiama *quadrante*. Un dato numero di gradi, di minuti e di secondi, per esempio, 35 gradi 27 minuti e 37 secondi, si scrive così, 35°.27'.37".

Quanto rimane a dirsi in questi Elementi suppone nel lettore alcune cognizioni di Geometria e di Fisica, dalle quali non potrebbe prescindere in alcun modo. Ma lo studio dell'Aritmetica accompagna necessariamente quello di tutte le altre parti del corso matematico, che per riuscire utile deve sempre discendere sino ai numeri, con rare eccezioni.

(*) Il meridiano terrestre è un cerchio *massimo* della Terra, e quindi la sua circonferenza è il più gran giro circolare che si possa fare intorno al globo, ed è lungo 21600 miglia.

QUADRO GENERALE

del sistema metrico decimale francese.

NOMI SISTEMATICI.	VALORI.
MISURE DI LUNGHEZZA	
<i>Miriametro.</i>	Diecimila metri
<i>Chilometro.</i>	Mille metri
<i>Ettometro.</i>	Cento metri
<i>Decametro.</i>	Dieci metri
METRO.	<i>Unità fondamentale de' pesi e delle misure.</i> Diecimilionesima parte del quarto del meridiano ter- restre (*)
<i>Decimetro.</i>	Decimo del metro
<i>Centimetro.</i>	Centesimo del metro
<i>Millimetro.</i>	Millesimo del metro
MISURE AGRARIE	
<i>Ettara.</i>	Cento are, o 10000 metri quadrati.
ARA.	Cento metri quadrati, quadrato di dieci metri di lato. (**)
<i>Centiara.</i>	Centesimo dell'ara, o metro qua- drato.
MISURE DI CAPACITÀ pe' liquidi e per gli aridi.	
<i>Chilolitro.</i>	Mille litri
<i>Ettolitro.</i>	Cento litri
<i>Decalitro.</i>	Dieci litri
LITRO.	Decimetro cubo (***)
<i>Decilitro.</i>	Decimo del litro

(*) Si veggano le precedenti due ultime note.

(**) Una superficie larga dieci metri e lunga dieci metri in quadro.

(***) Un volume, a forma di dado, lungo un decimetro, largo un decimetro e profondo un decimetro.

NOMI SISTEMATICI.	VALORI.
MISURE DI SOLIDITÀ.	
<i>Decastéro</i>	Dieci stéri.
<i>STÉRO</i>	Metro cubo.
<i>Decistéro</i>	Decimo dello stéro.
PESI.	
.	Mille chilogrammi, peso del metro cubo d'acqua e della tonellata di mare.
.	Cento chilogrammi, quintale metrico.
CHILOGRAMMO	Mille grammi. Peso nel vuoto di un decimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi del termometro centigrado (*).
<i>Ettogrammo</i>	Cento grammi.
<i>Decagrammo</i>	Dieci grammi.
GRAMMO	Peso di un centimetro cubo d'acqua a 4.° centigradi.
<i>Decigrammo</i>	Decimo del grammo.
<i>Centigrammo</i>	Centesimo del grammo.
<i>Milligrammo</i>	Millesimo del grammo.
MONETE.	
FRANCO	Cinque grammi d'argento al titolo di $\frac{9}{10}$ di fino.
<i>Decimo</i>	Decimo del franco.
<i>Centesimo</i>	Centesimo del franco.

(*) Il *termometro* è un istrumento che serve a misurare la *temperatura*, o il grado di calore de' corpi. E siccome i corpi crescono o diminuiscono di volume crescendo o diminuendo il loro grado di calore, così fu stabilito invariabilmente il calore dell'acqua che dovea servire a determinare l'unità di peso, affinchè nel decimetro cubo se ne contenesse sempre la stessa quantità. L'acqua si volle anche *distillata*, perchè con la *distillazione* essa vien depurata di tutte le sostanze estranee, e riesce sempre della medesima qualità.

In questo sistema metrico le misure itinerarie, ossia le unità di misura per le grandi distanze, sono il chilometro ed il miriametro, multipli decimali del metro e summultipli decimali del quadrante terrestre. Essi hanno un rapporto semplicissimo col *grado* di meridiano terrestre, quando si consideri la divisione decimale del cerchio: poichè, supponendo divisa la circonferenza in 400 *gradi*, il grado in 100 *minuti*, ed il minuto in 100 *secondi*, il quarto di meridiano contiene 100 gradi, o pure 10000 minuti ovvero 1000000 di secondi, e quindi il grado equivale a 100000 metri, il minuto a 1000 metri, ed il secondo a 10 metri; e per conseguenza il chilometro corrisponde ad un minuto ed il miriametro a 10 minuti. Ma ritenendo l'antica divisione *sessagesimale* del cerchio, per la quale il quadrante si divide in 90 gradi, il grado in 60 minuti ed il minuto in 60 secondi, il grado terrestre conterrà metri 111111,111... il minuto 1851,85185... ed il secondo 30,864..., ed inversamente il chilometro corrisponderà a minuti 0,54 ed il miriametro a minuti 5, 4. Ognun vede che queste relazioni non hanno più la semplicità propria del sistema metrico francese, ed è altronde importantissimo che i rapporti delle misure itinerarie col grado siano molto semplici, perchè le posizioni de' luoghi sulla Terra essendo assegnate in gradi terrestri, spesso le effettive misure lineari devono cambiarsi in gradi e viceversa. Anzi negli usi di mare il cammino fatto da una nave deve sempre ridursi in arco, per trovare sulla carta marina il luogo che occupa attualmente il bastimento, per cui quantunque alcune nazioni usino per le grandi distanze qualche misura che non ha un immediato rapporto col grado, nulladimeno tutte sono state obbligate di adottare per la navigazione il *miglio geografico da 60 a grado*, che equivale ad un minuto di cerchio massimo terrestre, o qualche suo multiplo come la lega marina francese. Laonde sembra che le misure metriche non potranno mai essere adottate per le grandi distanze, fino a che sussisterà la divisione *sessagesimale* del cerchio. Intanto la divisione decimale non è stata accettata dagli scienziati, ed ora anche in Francia si riviene all'antica, come lo dimostrano le opere matematiche più recenti, le carte geografiche, e gl'istrumenti geodetici e fisici graduati col sistema *sessagesimale* dai più rinomati meccanici (*).

(*) Alcuni hanno creduto che i matematici avessero rifiutata la nuova divisione decimale del cerchio, perchè le tavole e gl'istrumenti erano già costrutti con la divisione *sessagesimale*, e le opere antiche erano scritte con lo stesso linguaggio. Ma troppo deboli ostacoli eran questi: la traduzione del linguaggio de' libri antichi nel nuovo sarebbe stata facilissima per chiunque; in Francia ed in Germania già si costruivano gl'istrumenti a divisione decimale, e le tavole decimali erano state anche già calcolate. Più potenti motivi si richiedevano perchè una classe di uomini istruita e scevra di pregiudizi si fosse indotta a negare il suo assenso ad un miglioramento che si presentava sotto l'aspetto più lusinghiero, ed era opera dei primi scienziati del secolo; l'opinione più plausibile sembra essere la seguente.

La divisione del cerchio ha un'intima relazione con la divisione del tempo, dimodochè non si può mutar l'una senza mutare anche l'altra. Nella pratica dell'Astronomia moderna le osservazioni sono sempre accompagnate dal tempo, e spessissimo ancora il tempo si cambia in arco e l'arco in tempo. Così le posizioni de' luoghi sulla Terra sono assegnate per mezzo di latitudini e longitudini, e questi due elementi si determinano con osservazioni astronomiche nelle quali si deve far uso del tempo: la longitudine poi non può ottenersi in altro modo se non considerandola come la differenza di

Sistema metrico del Regno secondo la legge del 6 aprile 1840.

Le misure di Napoli esposte nel §. 77 non sembrano legato fra loro ed ordinate in modo da formare un sistema, ma il chiarissimo signor colonnello Visconti in una sua dotta memoria, presentata alla Reale Accademia

due tempi. Dunque fra il tempo e l'arco deve sussistere un rapporto immediato e semplice, e tale è appunto quello dei 360 gradi del cerchio alle 24 ore della giornata; 15 gradi corrispondono ad un'ora, 15 minuti di arco ad un minuto di tempo, e 15 secondi ad un secondo. Divisa la circonferenza in 400 gradi la semplicità di questi rapporti svanisce, perchè ad un'ora corrispondono 16 gradi e $\frac{8}{5}$, ad un minuto 27 minuti o $\frac{7}{5}$, e ad un secondo 46 minuti ed $\frac{2}{5}$. Nè devo suppersi che la indicata relazione fra l'arco ed il tempo interessi soltanto l'Astronomia. Le longitudini in mare sono determinate per mezzo del tempo, onde le operazioni della navigazione dipendono da quell'elemento, ed ognun sa quanto debbano esser sollecite per non riuscire infruttuose; e però gl'improprii rapporti tra le frazioni sessagesimali del tempo e decimali dell'arco non potrebbero esser adottati senza grave discapito della navigazione e del commercio. Si conchiude da ciò, e da quanto si è detto più sopra, che fra le misure itinerario ed il grado terrestre, e fra il grado e l'ora, devono sussistere rapporti semplici e chiari; e questo accordo fra le divisioni delle tre unità naturali, la lunghezza del meridiano terrestre, il cerchio, ed il giorno, interessa la società non meno che gli scienziati.

Gli autori del sistema metrico francese per rimuovere la difficoltà non mancarono di proporre la divisione decimale del tempo; il giorno fu diviso in 10 ore, l'ora in 100 minuti, ed il minuto in 100 secondi. Ma troppo malagevole era lo scuotere una convenzione sociale adottata da tempo immemorabile presso tutti i popoli inciviliti, come l'attuale divisione del giorno. Altronde il principale inconveniente che fa sentire la necessità di una riforma nelle misure essendo la loro varietà, quando una misura è divenuta generale cessa il bisogno di mutarla, e cresce oltremodo la difficoltà di eseguire tal cambiamento; poichè gli uomini, i quali resistono anche alle utili novità trattandosi di rinunziare a' loro usi, non saprebbero accettare un cambiamento la cui utilità sarebbe per essi inconcepibile, siccome quella che dipende unicamente da alti concetti scientifici. Quindi malgrado che a Parigi si fossero costrutti orologi a tempo decimale, e che gli scienziati francesi avessero nelle loro opere introdotta la divisione decimale del tempo, nessun astronomo o matematico straniero mostrò d'incaricarsi di questa innovazione.

Esclusa la divisione decimale del tempo, la divisione decimale del cerchio che con essa aveva relazione, non potè sostenersi, e si rivenne all'antica sessagesimale, la quale trovavasi già di accordo con le principali misure itinerarie delle più colte nazioni. La lega francese di 25 a grado per le misure terrestri e di 20 a grado per le marine, il miglio tedesco di 12 o di 15 a grado, e più di tutto il miglio italiano di 60 a grado equivalente al miglio marino, presentavano una riduzione facile ed immediata delle misure di lunghezza in minuti di cerchio massimo terrestre e viceversa; o l'uso generale del miglio geografico o marino rendeva altronde inutile, e quasi impossibile qualunque cambiamento: per la qual cosa le misure iti-

delle scienze nel 1828, dimostrò che, attenendosi strettamente alla definizione del palmo napolitano data dagli antichi architetti e passata in tradizione, cioè che *il palmo è la settemillesima parte del miglio*, le misure di Napoli derivano tutte con rapporti semplicissimi da quella unità lineare. Avventurosamente questa unità essendo aliquota del miglio geografico lo è pure del quarto del meridiano terrestre, dimodochè le misure di Napoli non solo formano sistema, ma sono legate con rapporti semplici e chiari alle misure itinerario ed al grado sessagesimale del meridiano terrestre, e godono di tutte le condizioni di un buon sistema metrico indicate nel §. 78 eccettuata l'ultima di minore importanza relativa alla divisione decimale, che pure in qualche misura si vede chiaramente accennata.

Il Colonnello Visconti fu il primo a disotterrare, per così dire, e porre in luce questo monumento dell'antica nostra civiltà; egli fondò il suo lavoro sulle esperienze eseguite dalla commissione del 1811, e per maggiore accertamento molte di quelle esperienze essendo state ripetute nel 1832, i risultamenti del Visconti rimasero confermati. Dietro queste indagini egli esprimeva il desiderio che le misure di Napoli, nuovamente definite e riordinate in sistema, fossero legalmente stabilite, ed estese ancora a tutti i Reali domini di qua del faro, e solo apportava una leggiera alterazione al moggio per renderlo aliquota del miglio quadrato. Dopo qualche anno, approfittando di una dotta opposizione, migliorò notabilmente il suo primo *progetto*, come si legge nell'opera, *Del sistema metrico della città di Napoli* pubblicata nel 1838.

Nelle sue ricerche il signor Visconti si propose sempre di rispettare scrupolosamente gli usi esistenti, ma il chiarissimo signor Commendatore Afan de Rivera, prendendo parte alla controversia, credette che non fosse stato difficile introdurre qualche utile innovazione, diretta specialmente a render più semplice il sistema ed a stabilire possibilmente la divisione decimale,

nerarie che dovevano la loro origine alla divisione sessagesimale del quarto di meridiano terrestre contribuirono anche potentemente a sostenerla.

Da quanto precede apparisce che il sistema metrico francese non gode più della essenzialissima proprietà di legare tutte le misure al grado terrestre col quale le misure itinerarie debbono avere un facile ed immediato rapporto, onde si può dire che quel sistema non ha più misure itinerarie. Se avesse potuto introdursi la divisione decimale del tempo, nessun sistema più perfetto che il francese; ma dovendo reggere l'antica divisione del tempo e del cerchio, non sarebbe stata per avventura da preferirsi alla diecimillesimesima parte del quadrante terrestre la millesima parte del miglio da 60 al grado, ossia alla millesima parte del minuto decimale la millesima parte del minuto sessagesimale? Questa nuova tesa, che poco allontanasi dall'antica, e corrisponde propriamente al passo itinerario napolitano, avrebbe adempito a tutte le condizioni, perchè stabiliva un perfetto accordo fra la divisione della lunghezza del meridiano terrestre e le divisioni delle altre due unità naturali già esistenti ed immutabili.

Ma il sistema metrico francese, per la solennità e l'esattezza con la quale furono stabilite le sue misure, sarà sempre il sistema metrico scientifico, il linguaggio universale in cui debbono tradursi le misure di ogni altro paese quando si vuol essere intesi dovunque. Ed a questo felicissimo risultamento contribuì anche non poco il concorso degli scienziati stranieri in quella grande operazione, ed il paragone diligentissimo che fu fatto delle nuove misure con le principali antiche misure europee.

siccome apparisce dalla sua opera intitolata, *Della restituzione del nostro sistema di misure pesi e monete alla sua antica perfezione* (*).

Rischiata pienamente la quistione da questi importanti lavori, S. M. il Re (D. G.) nell'alta sua saggezza si degnò di dettar le basi della riforma delle misure del Regno, le quali maturate e discusse negli illuminati suoi consigli diedero origine alla legge del 6 Aprile 1840, che onorerà sempre il regno di FERDINANDO II. Ecco le disposizioni della legge.

« 1.° La base del sistema metrico è il *palmo*, settemillesima parte » di un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre, » ovvero settemillesima parte del miglio geografico d'Italia o miglio » nautico di sessanta al grado. Esso sarà diviso in parti decimali, » e dieci palmi costituiranno una *canna*.

« La canna lineare, la canna quadrata, e la canna cuba sono » le unità di misura di lunghezza, di superficie, e di solidità per » tutti gli usi. La prima è eguale a 10 palmi lineari, la seconda » a 100 palmi quadrati, e la terza a 1000 palmi cubi. »

La canna di 8 palmi è dunque abolita, ma il palmo rimane lo stesso, per cui il rapporto fra la nuova e l'antica canna è tanto semplice che il cambiamento non può produrre alcuno inconveniente; in ogni caso si potrà contrattare a palmi sino a che non si comprenderà bene il valore della nuova misura. Il commendatore Afan de Rivera, prima della legge attuale, aveva già introdotta, con pieno successo e senza ostacoli, la canna di 10 palmi, e la divisione decimale del palmo, con le corrispondenti misure quadrate e cubiche, nella Direzione generale di acque e strade.

Il quadrante terrestre contiene 90 gradi, ovvero 5400 minuti, essendo il grado composto di 60 minuti; ma ogni minuto contiene 7000 palmi, dunque il quarto del meridiano terrestre contiene $5400 \times 7000 = 37800000$ palmi, e poichè lo stesso quadrante si compone di 10000000 di metri, se ne conclude che 37800000 palmi equivalgono a 10000000 di metri. Quindi,

« Rapporto col sistema metrico decimale: 100 metri uguagliano » 378 palmi, onde un palmo è eguale a metri 0,26455. »

« 2.° L'unità superficiale delle misure agrarie sarà il *moggio* » di 10000 palmi quadrati, o sia un quadrato che abbia per lato » 100 palmi, o canne 10. Esso sarà diviso in parti decimali. »

La legge sostituisce saggiamente questo nuovo *moggio* alle innumerabili misure agrarie di diverso nome e di diversa grandezza usate sinora nel Regno, poichè tutte queste misure potendo essere espresse in palmi quadrati, facilissima riesce la loro riduzione in moggi nuovi. Per esempio il *moggio* della città di Napoli è un quadrato che ha per lato palmi $30 \times 7 \frac{1}{2} = 220$ (§. 77), per cui equivale a palmi quadrati $220 \times 220 = 48400$, e quindi a moggi nuovi 4,84. Così pure il *moggio* di Nola corrisponde a moggi nuovi 5,76, perchè è un quadrato il cui lato è lungo 30 passi ciascuno di palmi 8, cioè palmi $30 \times 8 = 240$, onde un tal *moggio* si compone di palmi quadrati

(*) Leggere modificazioni non turbano le abitudini del popolo, ma interi cambiamenti ridurrebbero ad un vero flagello l'atto legislativo che li ordinasse, quantunque avesse per oggetto il bene del popolo stesso, ed il vantaggio del suo commercio.

$240 \times 240 = 57600$. Aggiungeremo che non vi è mezzo più semplice di paragonare fra loro le molteplici misure agrarie esistenti, che valutandole tutte in palmi quadrati, e quindi in moggi nuovi.

Un miglio quadrato equivale a 4900 moggi nuovi perchè contiene $7000 \times 7000 = 49000000$ di palmi quadrati.

« 3.° Il *tomolo* è l'unità delle misure di capacità per gli aridi. Esso equivale a tre palmi cubi, e si divide in 2 *mezzette* o in 4 *quarte*, o pure in 24 *misure*, ciascuna delle quali eguaglia il cubo del mezzo palmo. La misura degli aridi sarà praticata sempre a *raso* e non a *colmo*. »

« 4.° Il *barile* è l'unità di misura di capacità per alcuni dei liquidi, come il vino, l'aceto, l'acqua etc, e si divide in 60 *caraffe*. Esso equivale ad un cilindro retto del diametro di un palmo, e di tre palmi di altezza. (*) »

« La *Botte* si compone di 12 barili; ed è perciò eguale ad un cilindro retto di tre palmi di diametro e quattro palmi di altezza. »

« 5.° L'olio sarà misurato sempre a peso, a cantaja cioè, a rotola ed a frazioni decimali di rotolo. Pel commercio a minuto potrà misurarsi a capacità: le misure dovranno essere di figura cilindrica, e corrispondenti al peso di olio che debbono contenere alla temperatura di 20 gradi del termometro centigrado. »

Lo *stajo* e la *salma* rimangono dunque aboliti, e si sostituiscono ad essi i pesi di 10 rotoli e di 100 rotoli. Questa novità non dovrà produrre alcuno imbarazzo, perchè nel piccolo commercio l'olio si comprava già indifferentemente a rotola o a staja, e nel commercio in grande la riduzione delle salme in cantaja sarà facilissima pe' negozianti. Una salma contenendo rotoli $165\frac{1}{2}$, ed un cantajo rotoli 100 si avrà che,

$$1 \text{ salma} : 1 \text{ cantajo} :: 165\frac{1}{2} : 100 :: 496 : 300 ;$$

quindi 300 salme corrispondono a 496 cantaja, ovvero 75 salme a 124 cantaja.

Per ridurre un numero qualunque di salme a cantaja si può usare un procedimento molto semplice. Siccome dovrebbe moltiplicarsi il dato numero per 496 e dividere il prodotto per 300, sarà lo stesso che eseguire la moltiplicazione per $\frac{496}{300}$, ossia per $\frac{8}{5}$, e sottrarre da questo prodotto quello del dato numero per $\frac{4}{5}$, ossia la centesima parte del prodotto per $\frac{4}{5}$. Per esempio, dovendo ridurre 726 salme a cantaja, si aggiungerà a 726 la sua terza parte 242, e si avrà 968, a questo numero si aggiungerà di nuovo 242 e si otterrà 1210, e da questa seconda somma si toglierà la centesima parte di 968 cioè 9,68, e si avrà per ultimo risultamento 1200,32. Allo

(*) Si chiama *cilindro* quel solido che nasce dalla rotazione di un rettangolo intorno ad uno de' suoi lati mantenuto immobile; il diametro del cilindro è doppio del lato girevole del rettangolo, e l'altezza eguaglia il lato fisso. Il cilindro ha la figura di un ordinario bicchiere da tavola.

stesso modo si troverà che 425 salme equivalgono a cantaja $702,66\frac{2}{3}$, come qui appresso.

726	425
<u>242</u>	<u>141 $\frac{2}{3}$</u>
968	566 $\frac{2}{3}$
<u>242</u>	<u>141 $\frac{2}{3}$</u>
1210	708,33 $\frac{2}{3}$
<u>9,68</u>	<u>5,66 $\frac{2}{3}$</u>
1200,32	702,66 $\frac{2}{3}$

« 6.° Il *rotolo* è l'unità di misura de' pesi, e si dividerà in 3 parti decimali: la sua millesima parte è il *trappeso*. Il *cantajo* si compone di 100 rotola. »

« Rapporto col sistema metrico decimale: un rotolo eguale a chilogrammi 0,890997. »

« Un palmo cubo d'acqua distillata pesa in Napoli, nell'aria rotola 20 e 736 trappesi alla temperatura di gradi 16,144 del termometro centigrado (12,92 di Reaumur), ed alla pressione barometrica di palmi 2,865 ossia di 28 pollici (0,76). »

L'antica divisione del rotolo in *once* $33\frac{1}{3}$ è dunque abolita, ma non sarà difficile la conversione delle once, dramme etc. in frazioni decimali del rotolo; un'uncia equivale al peso di 3 *centesimi*, una *dramma* a 3 trappesi o *millesimi*, e due *acini* o *grani* equivalgono ad un decimo di trappeso ossia ad un *diecimillesimo* (§. 52). La metà di un rotolo si comporrà di 5 decimi, $\frac{1}{4}$ di rotolo di 2 decimi e 5 centesimi, e $\frac{1}{8}$ di rotolo di 7 decimi e 5 centesimi.

Questo articolo della legge presenta due determinazioni del rotolo, una facendolo derivare dal palmo con valutare in rotoli il peso di un dato volume di acqua distillata, l'altra col paragone immediato al chilogrammo francese. Or se un palmo cubo di acqua distillata pesata nelle circostanze sovra esposto vale rotoli 20,736, 1000 palmi cubi di acqua distillata corrisponderanno a 20736 rotoli, ed $\frac{1}{1728}$ di quel volume d'acqua peserà

$$\frac{20736}{1728} = 12 \text{ rotoli; ma } \frac{1000}{1728} = \frac{10}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6},$$

e quindi un volume di mille palmi cubi diviso per 1728 equivale al cubo di $\frac{5}{6}$ di palmo, dunque

« Un volume di acqua distillata corrispondente al cubo di $\frac{5}{6}$ di palmo pesato in Napoli nell'aria, alla temperatura di $16^{\circ}\frac{1}{2}$ centigradi = $12^{\circ}\frac{1}{3}$ di Reaumur (*) (che può considerarsi la media annuale di Napoli), e sotto la pressione barometrica di 28 pollici, equivale a 12 rotoli. »

(*) Questa temperatura differisce $\frac{1}{2}$ di grado centigrado soltanto da quella riportata nella Legge, ed abbiamo creduto doverla preferire perchè, sotto una espressione più semplice, serve forse meglio a stabilire l'esatta corrispondenza fra il valore 0,890997 assegnato al rotolo in parti del chilogrammo, ed il peso dell'indicato volume di acqua distillata, calcolato nelle espresse circostanze su i dati di Fisica più recenti ed accreditati.

Con questo rapporto più semplice, dato dal signor colonnello Visconti a pagina 59 della citata sua opera *Del sistema metrico etc.*, sarebbe facile a chiunque di trovare la quantità del rotolo.

Parlando del confronto delle misure mostreremo l'esatta coincidenza delle due diverse determinazioni del rotolo indicate nella Legge.

« 7.^o Sarà tollerato per ora, e sino a nuova disposizione, che »
 » pei soli usi farmaceutici sia adoperato il peso della *libbra* colle »
 » attuali suddivisioni. »

La libbra è dunque abolita, ma non potendo abbandonarsi immediatamente l'uso di contrattare alcuni generi a libbre, si sostituirà al peso di una libbra quello di 36 centesimi di rotolo, ossia 3 decimi e 6 centesimi; mezza libbra corrisponderà a 18 centesimi ed $\frac{1}{4}$ di libbra a 9 centesimi.

§. 81.

Del passo geodetico.

Fin dal 1815 il sig. colonnello Visconti, propose per unità di misura ne' lavori geodetici il *passo*, millesima parte del miglio di 60 a grado, ed eguale a sette palmi napolitani. Questa misura, adottata con superiore approvazione, e divisa in parti decimali offre molti vantaggi. Per essa le grandi distanze valutate con esattezza sino alle minime quantità, possono immediatamente cambiarsi in miglia, secondo l'uso generale d'Italia, col semplice trasporto della virgola di tre luoghi a sinistra; così 34564,55 passi equivalgono a miglia 34,56455. Il passo ha inoltre col grado terrestre l'immediato rapporto di cui godeva in origine il metro, sussistendo la divisione decimale del cerchio, poichè un numero qualunque di passi si cambia in minuti del meridiano quando si riduce in miglia; e questa proprietà del passo dipende da che esso è derivato dal meridiano terrestre con la divisione sessagesimale, precisamente come il metro con la divisione decimale, uno essendo la millesima parte del minuto sessagesimale, e l'altro la millesima parte del minuto decimale (nota a pag. 176). Ed è da avvertirsi che il passo ed il palmo non sarebbero aliquote del quadrante terrestre, come il metro, se non fossero dedotti dal minuto del grado medio del meridiano, secondo prescrive la Legge (§. prec.). Imperciocchè, si sa che per la sferoidicità terrestre tutti i gradi non hanno la medesima lunghezza allo varie latitudini, e quindi una misura aliquota di un grado particolare non potrebbe esserlo dell'intero quadrante, che è la somma di 90 gradi tutti diversi fra loro; mentre al contrario una misura aliquota del grado medio aritmetico de' novanta gradi disuguali, è necessariamente aliquota della loro somma, ossia del quadrante terrestre. Per questa ragione gli autori del sistema metrico francese, nello stabilire l'unità fondamentale, non considerarono la lunghezza di alcun grado particolare di meridiano, ma ricavarono il metro dall'intera lunghezza del quadrante, e con ciò vennero a desumerlo dal grado medio decimale. La Legge del 6 Aprile, imitando il procedimento di quei grandi nomini, ha rievato in vece il palmo dal grado medio sessagesimale, perchè importava moltissimo di farlo corrispondere all'antica sua definizione di *settemillesima parte del miglio*; e per conseguenza necessaria il palmo è poi risultato aliquota del quadrante terrestre. Ogni altra maniera di derivare il passo ed il palmo dalle misure terrestri sarebbe stata irregolare.

Intanto il passo di cui si fa uso nel Real Ufficio Topografico di Napoli, è stato per maggiore esattezza dedotto dalla determinazione del quadrante terrestre data dal sig. Delambre, e generalmente adottata in Europa nelle

operazioni geodetiche. Secondo i calcoli di quell'astronomo, posteriori allo stabilimento in Francia del metro legale, il quarto di meridiano si compone di 10000724 metri legali, e poichè il quadrante contiene 5400 minuti, ed il passo geodetico è la millesima parte del minuto, per ottenere la lunghezza del passo espressa in metri, bisognerà dividere 10000724 per 5400 e per 1000, ossia per 5400000, e si avrà,

$$1^{\text{passo geod}} = 1^{\text{met}}, 851985926$$

Questo valore è un poco più grande di 7 palmi legali napolitani, perchè la legge, per rendere il palmo indipendente dalle piccole variazioni cui potrà ancora andar soggetta la lunghezza del quadrante terrestre in conseguenza di nuove misure, ha voluto porlo in esatta corrispondenza col metro legale, non incaricandosi della correzione di Delambre. La differenza fra il passo geodetico e 7 palmi napolitani è però affatto insensibile, non solamente negli usi civili, ma anche nelle operazioni topografiche, e si avverte soltanto nelle delicate operazioni geodetiche; ed atteso il grado di perfezione delle conoscenze attuali sulla figura e grandezza della Terra, si può con sicurezza asserire che qualunque nuova rettificazione non potrà mai avere alcuna influenza sulla lunghezza del metro e del palmo legale negli usi della società (*). Un palmo legale essendo eguale a $0^{\text{met}}, 26455026455...$, sette palmi equivalgono a metri 1,85185185, e differiscono dal passo geodetico determinato di sopra per $0^{\text{met}}, 000134$; questa piccolissima differenza fra le due misure si avverterebbe con mezzi delicati quando i corrispondenti campioni fossero stati costruiti con molta esattezza, e divisi alla medesima temperatura; ma un campione di ottone di sette palmi legali diviso alla temperatura di 0 gradi di Reaumur acquisterebbe l'esatta lunghezza del passo geodetico alla temperatura di soli $3^{\circ}\frac{1}{2}$.

In fine di quest'opera si troveranno alcune tavole di riduzione per agevolare agli stranieri la conoscenza delle nostre misure, ed ai nostri la cognizione delle misure straniere; in una tavola di misure itinerario il miglio si è fatto eguale a 1000 passi geodetici, e la lega francese di 25 a grado a 2400 passi, cioè il miglio a $1851^{\text{met}}, 9859$ e la lega a $4444^{\text{met}}, 7662$.

§. 82.

Sistema metrico di Sicilia.

Con una Legge del 31 Dicembre 1809 le misure di Sicilia furono ordinate e definite come segue.

Il *palm*, unità di lunghezza, si divide in 12 *once*, l'oncia in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. Una *canna* è eguale ad 8 palmi.

Il *miglio* equivale a 5760 palmi, e si compone di 45 *corde*: la corda contiene 4 *catene* e la catena 4 *canne*.

La Legge non diede il rapporto fra il palmo ed il metro, per

(*) Il sig. *Puissant* ha trovato un errore di 130,5 metri sull'antico calcolo dell'arco di meridiano di Spagna, e dopo averlo corretto ne ha ricavata la lunghezza del quadrante terrestre di metri 10001789. Noi abbiamo con maggior cura rifatto il calcolo dello stesso arco di meridiano, ed abbiamo trovato una differenza di 125,6 metri soltanto con l'antica determinazione, onde il quadrante terrestre è risultato di metri 10001765, siccome sarà dimostrato in una nostra memoria. Ma neppure questo nuovo aumento contribuisce ad alterare il metro ed il palmo negli usi della società.

cui rimaneva qualche incertezza su questo punto. Il signor colonnello Visconti dietro l'esame di alcuni campioni, ed incaricandosi ancora de' rapporti dati dal P. Piazza, dal sig. Cacciatore, e da altri, ha conchiuso che il palmo siciliano corrisponde a $\frac{4}{11}$ del nostro palmo, ossia a $\frac{4}{11}$ di 0,^m26455... e quindi a 0,^m258098.

L'unità delle misure agrarie è la *salma*, che è un quadrato avente per lato 6 $\frac{1}{2}$ canne: la salma si divide in 4 *bisacce*, la bisaccia in 4 *tomoli*, il tomolo in 4 *mondelli*, il mondello in 4 *carozzi*, il carrozzo in 4 *quarti*, per cui il quarto risulta di 4 canne quadrate.

La misura di capacità per gli aridi è il *tomolo* equivalente ad un palmo cubo; si divide in 4 *mondelli*, ed il mondello in *carozzi*, *quarti* e *quartigli*, sempre di 4 in 4. Sedici tomoli formano la *salma*.

La misura di capacità pe' liquidi è il *quartaro* che è pure uguale ad un palmo cubo; si divide in 20 *quartucci*, il quartuccio in 2 *caraffe*, la caraffa in 2 *bicchieri*. Due quartari formano un *barile*, e 32 barili una *botte*.

L'unità di peso è il *rotolo* che corrisponde ad un quartuccio di olio d'oliva puro e lampante pesato a Palermo nell'aria, alla temperatura di 64° di Fahrenheit, ossia di 14 $\frac{2}{3}$ di Reaumur; si divide in 30 *once*, l'oncia in 8 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 20 *grani*, il grano in 8 *ottavi*. La libbra è di 12 once, ed il cantaro di 100 rotoli.

Le variazioni cui va soggetta la gravità specifica dell'olio per le diverse sue qualità e pel vario grado di purezza, fanno che la precedente definizione del rotolo siculo non sia molto precisa. Il signor colonnello Visconti ha fatto paragonare nella Zecca di Napoli un campione ufficiale del rotolo siciliano in porfido ad un eccellente campione del chilogrammo venuto da Parigi servendosi di una bilancia sensibilissima; ed ha trovato che

il rotolo siculo equivale a chilogrammi 0,79342;

su questo rapporto ha egli calcolato che il rotolo siciliano corrisponde ad 80 once cube siciliane di acqua distillata (*) pesate nell'aria a Palermo sotto la pressione barometrica di 28 poll. ed alla temperatura di 17°,82 di Reaumur.

CONFRONTO DELLE MISURE

§. 83.

Nozioni generali.

Il paragone del sistema metrico di un paese con quello di un altro paese dipende unicamente dal rapporto delle rispettive unità di misura lineare, peroc-

(*) Ottanta once cube equivalgono al volume di un parallelepipedo rettangolo di 3 once di altezza, ed avente per base un quadrato di 4 once di lato, ovvero al cubo di $\frac{1}{4}$ once più la sua quarta parte.

chè essendo tutte le altre misure, di superficie, di capacità e di peso, legate a quelle unità con relazioni conosciute, dato il rapporto delle misure lineari, se ne potranno facilmente desumere i rapporti delle misure subordinate. Ma bisogna bene avvertire che, i rapporti delle misure superficiali e cubiche si ricavano dai quadrati e dai cubi de' rapporti delle corrispondenti unità lineari. Si sa, per esempio, che 100 metri equivalgono a 378 palmi, e siccome la superficie che ha 100 metri di lunghezza e 100 metri di larghezza in quadro, ossia il *quadrato* che ha 100 metri di lato, equivale a $100 \times 100 = 10000$ metri quadrati (pag. 141), e similmente il quadrato che ha 378 palmi di lato equivale a $378 \times 378 = 142884$ palmi quadrati, così 10000 metri quadrati dovranno equivalere a 142884 palmi quadrati, perchè due quadrati sono eguali quando i loro lati sono eguali. Allo stesso modo il parallelepipedo rettangolo che ha 100 metri di lunghezza, 100 di larghezza e 100 di profondità, ossia il *cubo* che ha 100 metri di lato, corrisponde a metri cubi $100 \times 100 \times 100 = 100^3$ (pag. 141), ed il cubo che ha 378 palmi di lato corrisponde a 378³ palmi cubici; e dovendo questi due cubi essere eguali fra loro perchè hanno lati eguali, si concluderà che 100³ metri cubi equivalgono a 378³ palmi cubi, ossia che 1000000 di metri cubi equivalgono a 54010152 palmi cubi. Essendo poi 100² metri quadrati equivalenti a 378² palmi quadrati, e 100³ metri cubi equivalenti a 378³ palmi cubi, ne segue (§. 73) che

$$1 \text{ met quad} : 1 \text{ pal quad} :: 378^2 : 100^2$$

$$1 \text{ met cub} : 1 \text{ pal cub} :: 378^3 : 100^3,$$

le quali proporzioni si ricavano ancora da quella esistente fra le unità lineari,

$$1 \text{ metro} : 1 \text{ palmo} :: 378 : 100,$$

elevandone i termini a quadrato od a cubo (§. 62), e dimostrano che i rapporti fra le unità superficiali o cubiche sono i quadrati o i cubi de' rapporti fra le unità lineari. Le medesime proporzioni, applicandovi la regola del tre, danno le relazioni seguenti

$$1 \text{ met} = \frac{378}{100} \text{ palmi}, \quad 1 \text{ pal} = \frac{100}{378} \text{ metri}$$

$$1 \text{ met quad} = \frac{378^2}{100^2} \text{ palmi quad}, \quad 1 \text{ pal quad} = \frac{100^2}{378^2} \text{ metri quad}$$

$$1 \text{ met cub} = \frac{378^3}{100^3} \text{ palmi cub}, \quad 1 \text{ pal cub} = \frac{100^3}{378^3} \text{ metri cub}.$$

Un'altra importante osservazione deve farsi relativamente alle misure quadrate e cubiche. Abbiamo veduto (pag. 141) che, moltiplicando fra loro due lunghezze espresse in numeri per mezzo della stessa unità lineare, il prodotto che si ottiene rappresenta una superficie espressa anche in numeri mediante l'unità quadrata corrispondente all'unità lineare assunta; così 33 metri moltiplicati per 25 metri danno 825 metri quadrati. Ma se nelle misure da moltiplicarsi si considerano diversi ordini di unità una decupla dell'altra, come il *metro*, il *decametro*, l'*ettometro* etc, e si vogliono nel prodotto distinguere le rispettive unità quadrate, allora bisognerà ricordarsi che il quadrato delle decine non può contenere cifre significative di un ordine inferiore alle centinaia (§. 47), il quadrato delle centinaia non può contenere cifre significative di un ordine inferiore alle decine di migliaia etc; o quindi in un prodotto di metri per metri le prime due cifre a destra esprimeranno *metri quadrati*, le seconde due cifre *decametri quadrati*, ovvero *are*, la

terza coppia esprimerà *ettometri quadrati*, ossia *ettaro* e così di seguito. Laonde il precedente prodotto 825 contiene 8 are e 25 metri quadrati. Allo stesso modo si distingueranno i varii ordini di unità cubiche nel prodotto di tre lunghezze espresse in numeri, avvertendo soltanto di dividerlo in ternarii in vece di coppie (§. 48); per esempio il prodotto 4 538 124 sarà composto di 4 ettometri cubi, 538 decametri cubi, e 124 metri cubi.

Ciò che si è detto del prodotto di due o tre lunghezze espresse in numeri vale ancora per un numero qualunque indicante misure quadrate o cubiche, malgrado che non risulti dalla moltiplicazione di due o tre numeri; perocchè in generale, trattandosi di unità quadrate, ogni centinajo corrisponde al quadrato di una decina, ogni decina di migliaja al quadrato di un centinajo etc; e per le unità cubiche ciascun migliajo corrisponde al cubo di una decina, ciascun milione al cubo di un centinajo, e così in progresso. E la stessa regola si può estendere alle frazioni decimali dell'unità principale, dividendo in coppie o in ternarii le cifre decimali di un numero indicante misure quadrato o cubiche a partire dalla virgola, analogamente a quanto si è detto a pag. 89 e 92: la prima coppia o il primo ternario esprimerà centesimi quadrati o cubi, e così andando avanti; è chiaro poi che, occorrendo, bisognerà render completa l'ultima coppia o l'ultimo ternario a destra con l'aggiunta di uno o due zeri. Dopo tutto ciò, in un numero qualunque indicante misure quadrate o cubiche si potranno facilmente distinguere i diversi ordini di unità quadrate o cubiche, sì intere che decimali; per esempio il numero di metri quadrati 4135,121 sarà composto di 41 decametri quadrati, 35 metri q., 12 decimetri q., e 10 centimetri q., e se lo stesso numero indicasse metri cubi, conterrebbe 4 decametri cubi, 135 metri cubi, e 121 decimetri cubi. E qui deve avvertirsi la gran differenza che passa tra le frazioni decimali di un'unità quadrata o cuba ed i quadrati o i cubi delle frazioni corrispondenti dell'unità lineare; così un decimo di metro quadrato è molto diverso da un decimetro quadrato, ed equivale propriamente a 10 decimetri q., ed un decimo di metro cubo vale 100 decimetri cubi etc, come si vede facilmente.

L'osservazione precedente relativa alle frazioni dell'unità principale non vale pe' numeri complessi ne' quali la divisione di quella unità non è decimale. Così le frazioni decimali di tesa quadrata o cuba non rappresenteranno piedi o pollici quadrati o cubici; ed è chiaro che le relazioni fra le unità secondarie quadrate o cubiche con l'unità principale e fra loro, saranno diverse secondo le diverse misure. La tesa lineare contenendo 6 piedi, la tesa quadrata conterrà $6 \times 6 = 36$ piedi quadrati (pag. 141), e la tesa cuba sarà composta di $6 \times 6 \times 6 = 216$ piedi cubici; similmente il piede quadrato conterrà $12 \times 12 = 144$ pollici quadrati, ed il piede cubo $12 \times 12 \times 12 = 1728$ pollici cubi etc. La canna composta di palmi ed once, nel modo usato in Napoli prima della legge del 6 Aprile, offre altre relazioni; la canna quadrata si compone di $8 \times 8 = 64$ palmi q., e la cubica di $8 \times 8 \times 8 = 512$ palmi cubici; il palmo quadrato si compone, come il piede, di 144 once quadrato, ed il palmo cubo di 1728 once cubiche; e finalmente l'oncia quadrata contiene $5 \times 5 = 25$ minuti quadrati e l'oncia cuba $5 \times 5 \times 5 = 125$ minuti cubi.

Da ciò si comprende quanto debba riuscire più complicato il calcolo delle misure quadrate o cubiche allorchè si tratta di numeri complessi, e poichè occorre non di rado di farne uso, noi esporremo qui appresso le avvertenze principali che ad esso si riferiscono.

Avvertenze da usarsi nel calcolo delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche.

I. Quando l'unità lineare si divide in parti decimali, il calcolo delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche si esegue come quello de' numeri astratti, e solo deve farsi attenzione al significato de' prodotti o de' quozienti ottenuti dalle moltiplicazioni o divisioni di questo genere. Per esempio, dopo la legge del 6 Aprile, la canna napoletana essendo divisa in 10 palmi, ed il palmo in 10 once, per moltiplicare $3^{can} 4^{pal} 9^{onc}$, 3 per $9^{can} 7^{pal} 2^{onc}$, 4, si moltiplicheranno fra loro i numeri 3,493 e 9,724, ed il prodotto 33,965932 esprimerà canne quadrate e frazioni decimali di canna, o pure, volendo in esso ravvisare i palmi quadrati e le once quadrate, si dirà che contiene 33 can. q., 96 pal. q., e 59,32 onc. q. (§. prec.). Si avverte ancora che quel numero di canne quadrate si potrà subito ridurre in palmi quadrati trasportando la virgola due luoghi a destra, ed in once quadrate trasportandola quattro luoghi, dimodochè canne quadrate 33,965932 equivalgono a palmi quadrati 3396,5932, ovvero ad once quadrato 339659,32; le quali operazioni oltre di essere giustificate abbastanza da ciò che si è detto nel §. precedente, sono immediatamente dimostrate riflettendo che 3396,5932 è il prodotto di palmi 34,93 per palmi 97,24, e 339659,32 è il prodotto di once 349,3 per once 972,4. Similmente per moltiplicare $3^{\circ} . 4^{\circ} . 9^{\circ}$, 3 per $9^{\circ} . 7^{\circ} . 2^{\circ}$, 4 e per $2^{\circ} . 1^{\circ} . 7^{\circ}$ si moltiplicheranno fra loro i numeri 3,493; 9,724; 2,17; ed il prodotto 73,70607244 esprimerà canne cube; per ridurlo in palmi cubi si passerà la virgola dopo tre luoghi a destra, e per ridurlo in once cube, si passerà dopo sei luoghi, per cui quel prodotto corrisponderà pure a 73706,07244 palmi cubi, ovvero a 73706072,44 once cube; e volendo distinguerlo in canne cube, palmi cubi ed once cube, si dirà che contiene 73 can. c., 706 pal. c., e 72,44 on. c.

La divisione delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche si eseguirà pure come quella de' numeri astratti, e bisognerà solamente far attenzione alla natura del quoziente; il quale sarà un numero astratto, se si tratterà di dividere unità quadrate per unità quadrate, o unità cube per unità cube; esprimerà unità lineari, se dovranno dividersi unità cube per unità quadrate, o pure unità quadrate per unità lineari; ed indicherà unità lineari se dovranno dividersi unità cube per unità quadrate. Tutto ciò si comprende facilmente riflettendo, 1.° che il prodotto di due numeri esprimenti unità lineari rappresenta unità quadrate, ed il prodotto di unità quadrate per unità lineari esprime unità cubiche, 2.° che ogni prodotto diviso per uno de' suoi fattori deve dare l'altro fattore; ma lo studio della *Geometria* rischiarerà maggiormente queste idee. La divisione di unità lineari per unità quadrate o cubiche, come pure di unità quadrate per unità cubiche non avrebbe alcun significato.

II. Quando l'unità lineare è complessa, le operazioni da eseguirsi su i numeri esprimenti unità quadrate o cubiche costituiscono un calcolo di numeri complessi alquanto diverso da quello già considerato altrove, e la differenza nasce da che i rapporti esistenti fra le unità principali quadrate o cubiche e le unità secondario sono i quadrati o i cubi dei rapporti che si verificano fra le corrispondenti unità lineari.

Cominciamo con dare qualche esempio di addizione e di sottrazione.

Addizione.

$$\begin{array}{r}
 54^{11} \cdot 22^{11} \cdot 100^{11} \\
 31 \cdot 12 \cdot 110 \\
 4 \cdot 35 \cdot 48 \\
 \hline
 89 \cdot 69 \cdot 258 \\
 36 \cdot 144 \\
 \hline
 90 \cdot 34 \cdot 114
 \end{array}$$

Sottrazione.

$$\begin{array}{r}
 95^{11} \cdot 60^{11} \cdot 96^{11} \cdot 20^{11} \\
 21 \cdot 500 \cdot 624 \cdot 12 \\
 \hline
 73 \cdot 71 \cdot 1200 \cdot 8
 \end{array}$$

L'addizione è fra tese, piedi e pollici quadrati, e la sottrazione fra canne, palmi, once e minuti cubici, secondo l'antica divisione usata in Napoli. Le operazioni si sono eseguite come quelle de' numeri complessi (§. 50); ma il piede quadrato si è fatto di $12^2 = 144$ pollici, la tesa di $6^2 = 36$ piedi, e rispetto alle misure cubiche, l'oncia si è fatta di $5^3 = 125$ minuti, il palmo di $12^3 = 1728$ once, e la canna di $8^3 = 512$ palmi (§. prec.).

III. La moltiplicazione di misure lineari complesse per misure lineari complesse della stessa specie si può eseguire in quattro diversi modi come nel §. 52, cioè 1.° riducendo le frazioni complesse in frazioni ordinarie dell'unità principale, 2.° riducendo le frazioni complesse in frazioni decimali dell'unità principale, 3.° col metodo di prendere in parti, 4.° riducendo i fattori in unità dell'ultima specie. Applichiamo le prime tre diverse maniere alla moltiplicazione di $5^{\text{canna}} 4^{\text{palmi}} 3^{\text{once}}$ per $4^{\text{canna}} 2^{\text{palmi}} 2^{\text{once}}$, riserbando di parlare in fine della quarta; ecco l'andamento del calcolo, al quale faremo seguire gli opportuni schiarimenti.

1.°

$$\begin{array}{r}
 5^{\circ} \cdot \frac{11}{12} \\
 4^{\circ} \cdot \frac{11}{12} \\
 \hline
 20 \cdot \frac{11}{12} \\
 2 \cdot \frac{11}{12} \\
 1 \cdot \frac{11}{12} \\
 \hline
 23^{\circ} \cdot \frac{11}{12}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 319^{11} \cdot 512 \\
 64 \cdot 39^{11} \cdot 126^{11}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1276 \\
 1914 \\
 \hline
 20416^{11} \\
 5056 \\
 448 \\
 144 \\
 \hline
 1792 \\
 1792 \\
 448 \\
 \hline
 64512^{11} \\
 1331 \\
 3072 \\
 0000
 \end{array}$$

2.°

$$\begin{array}{r}
 5,53125 \\
 4,270833 \dots \\
 \hline
 4,270833 \\
 521353
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 21354165 \\
 2135417 \\
 128125 \\
 4271 \\
 854 \\
 214
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 23^{11} \cdot 623046 \\
 64 \\
 \hline
 2492184 \\
 3738276 \\
 \hline
 39^{11} \cdot 874944 \\
 144 \\
 \hline
 3499776 \\
 3499776 \\
 874944 \\
 \hline
 125^{11} \cdot 991936
 \end{array}$$

3.^a

5 ^a	4 ^a	3 ^a
4	2	2
20		

per 4 pal.....2

per 1 pal..... $\frac{1}{4}$ ^aper 3 on.....1^aper 2 pal.....1 . 3^a . 0^{ca} . 3^a $\frac{1}{4}$ per 1 pal.....5^a . 6^a . 1^{ca} $\frac{1}{2}$ per 2 on.....0 . 11 . $\frac{5}{16}$

Somma.....	23 ^a	4 ^a	11 ^{ca}	4 ^{ca} $\frac{1}{16}$
	8	96	480	
	32 ^a	66	1920	
		99	30	
		1056 ^a	144	1950 ^a
		7	48	200
			78	78
			000	
	23 ^a	39 ^a	126 ^a	

1.^a Dopo aver ridotte le frazioni complesse del moltiplicando e del moltiplicatore in frazioni ordinarie, si è eseguita la moltiplicazione di un intero e frazione per un intero e frazione al solito; il prodotto 23 $\frac{3 \frac{1}{2} \frac{9}{16}}$ dovendo dinotare canne quadrate, si è ridotta la frazione $\frac{3 \frac{1}{2} \frac{9}{16}}$ di canna quadrata in palmi q. ed once q., e si sono ottenuti 39^a 126^a. Per fare questa riduzione si è considerata la frazione $\frac{3 \frac{1}{2} \frac{9}{16}}$ come la 512^aesima parte di 319 canne q., e si sono cambiate le canne q. in palmi q. moltiplicandole per 64; indi si è diviso il prodotto per 512, e si sono ottenuti 39^a per quoziente, e 448^a per resto; si è ridotto questo resto in once q. moltiplicandolo per 144, e continuando la divisione per 512 si è avuta l'ultima parte del quoziente, 126^a. La conversione di una frazione ordinaria in frazione complessa di unità quadrate non differisce dunque per nulla da quella riportata a pag. 100, e solo bisogna ricordarsi che i rapporti fra le unità quadrate delle diverse classi sono i quadrati de' rapporti fra le corrispondenti unità lineari.

2.^a Si sono ridotte le frazioni complesse in frazioni decimali, e si è calcolato quante cifre bisognava ritenere affinché il prodotto contenesse un errore piccolissimo, e propriamente non maggiore di un'oncia quadrata. A tal fine si è considerato che una canna quadrata è composta di 8^a = 64 palmi quadrati, e di 8^a × 12^a = 64 × 144 = 9216 once q., per cui volendo limitare l'approssimazione ad un'oncia quadrata, il prodotto doveva essere esatto fra un diecimillesimo. Quindi, per la regola data a pag. 71, dovevano ritenersi cinque cifre sì nel moltiplicando che nel moltiplicatore, ma se n'è ritenuta una di più per eseguire la moltiplicazione col metodo abbreviato esposto a pag. 76. La frazione decimale di canna quadrata 0,623046 annessa al prodotto si è ridotta in palmi quadrati ed once q. nel modo indicato a pag. 100,

o supponendo, come nell'operazione precedente, la canna quadrata composta di 64 palmi q., ed il palmo q. di 144 onces q.

3.^o Tutta questa terza operazione sino alla *Somma* è stata eseguita perfettamente col metodo di prendere in parti, considerando i fattori della moltiplicazione ed i prodotti parziali come misure lineari, cioè supponendo sempre la canna divisa in 8 palmi, il palmo in 12 onces e l'oncia in 5 minuti. Non è difficile giustificare questa maniera di operare, e far conoscere nello stesso tempo il significato de' prodotti parziali e del prodotto totale così ottenuti.

Quando si prendono le parti aliquote di una misura quadrata, considerandola divisa e suddivisa nelle sue specie secondarie come si divide la misura lineare dello stesso nome, quelle parti così ottenute rappresentano tanti rettangoli aventi per lunghezza comune la principale unità lineare, e per altezze i multipli delle sue unità secondarie, o suddivisioni. Questo principio per la sua semplicità non ha bisogno di dimostrazione, e solo vuol esser chiarito con qualche esempio. Se una canna quadrata si suppone divisa in 8 parti eguali come la canna lineare, ognuna di quelle parti sarà un rettangolo che ha per lunghezza una canna e per altezza un palmo, e si chiama *canna-palmo*; quindi per prendere, a cagion d'esempio, la quarta parte di 2 canne quadrate, supponendole divise come le canne lineari, si prenderà la quarta parte di 16, che sarà 4, ed indicherà canne-palmi. Allo stesso modo, considerando una canna-palmo divisa in 12 parti eguali come il palmo lineare, ognuna di queste parti dodicesime sarà un rettangolo avente per lunghezza una canna e per altezza un'oncia, e sarà chiamata *canna-oncia*; e dividendo la canna-oncia in 5 parti eguali come l'oncia lineare, si otterrà in fine un rettangolo la cui lunghezza sarà sempre una canna e l'altezza un minuto, e sarà detto *canna-minuto*. E poichè la canna-palmo si divide in canne-once ed in canne-minuti come il palmo lineare in onces e minuti lineari, è chiaro ancora che, se si prenderanno le parti aliquote di un dato numero di canne-palmi, o di canne-once come si prendono delle misure lineari, quelle parti esprimeranno canne-once e canne-minuti; così la quinta parte di 8 canne-palmi sarà $1^{\text{c}} \text{ can pal } \frac{1}{5} \text{ c. can } 1^{\text{c}} \text{ min.}$, al pari della quinta parte di 8 palmi che è $1^{\text{pal}} \frac{1}{5} \text{ 2.}^{\text{a}} \text{ min.}$. Tutto ciò non ha alcuna difficoltà per chi conosce i principii di Geometria, e basta a dimostrare che avendo, nella 3.^a operazione di sopra scritta, moltiplicata la frazione complessa $4^{\text{e}} 3^{\text{m}}$ del moltiplicando per la prima specie 4^{e} del moltiplicatore, col solito metodo di prendere in parti, usato come per le misure lineari, le specie secondarie contenute nei prodotti parziali così ottenuti sono risultate canne-palmi, canne-once, e canne-minuti.

Passando al prodotto del moltiplicando $5^{\text{e}} . 4^{\text{e}} . 3^{\text{m}}$ per la frazione complessa del moltiplicatore $2^{\text{e}} . 2^{\text{m}}$, deve inoltre osservarsi che la moltiplicazione di una canna per canne, per palmi, per onces, o per minuti dà canne quadrate, canne-palmi, canne-once, o canne minuti, come è chiaro per la Geometria, e quindi il prodotto di 1^{e} per $5^{\text{e}} . 4^{\text{e}} . 3^{\text{m}}$ esprimerà canne quadrate, canne-palmi, e canne-once: ma nella operazione che stiamo esaminando, il prodotto di $2^{\text{e}} . 2^{\text{m}}$ per $5^{\text{e}} . 4^{\text{e}} . 3^{\text{m}}$ si è eseguito prendendo le parti aliquote del prodotto di 1^{e} per $5^{\text{e}} . 4^{\text{e}} . 3^{\text{m}}$, dunque così facendo si son prese le parti aliquote di un certo numero di canne quadrate, canne-palmi e canne-once, e propriamente di $5^{\text{e}} 4^{\text{e}} 3^{\text{m}}$; e poichè quelle parti si sono prese supponendo al solito la canna quadrata divisa e suddivisa come la canna lineare, pel principio qui sopra stabilito potremo conchiudere che anche la moltiplicazione della frazione complessa del moltiplicatore pel moltiplicando ha dovuto daro canne quadrate, o canne-canne, canne-palmi, canne-once, e canne-minuti; e per conseguenza la *Somma* di tutti i prodotti parziali è risultata composta delle medesime specie di unità complesse.

Dopo aver fatto conoscere il significato delle specie secondarie contenute nel prodotto totale, sarà facile accennare come siansi ridotte in unità quadrate. La canna-palmo, la canna-oncia e la canna-minuto sono rettangoli che hanno tutti per lunghezza una canna, e per larghezza un palmo, un' oncia, ed un minuto rispettivamente; quindi per esprimerli in misure quadrate bisognerà che la lunghezza di ciascuno sia ridotta in unità della stessa specie della larghezza (pag. 141). La canna palmo dovrà dunque considerarsi un rettangolo di 8 palmi di lunghezza ed 1 palmo di larghezza equivalente perciò ad 8 palmi quadrati: la canna-oncia avrà $8 \times 12 = 96$ once di lunghezza ed un' oncia di larghezza, e corrisponderà a 96 once quadrate; la canna-minuto avrà $8 \times 12 \times 5 = 480$ minuti di lunghezza ed 1 minuto di larghezza, ed equivarrà a 480 minuti quadrati. Laonde per ridurre le specie secondarie del prodotto totale in misure quadrate, si sono moltiplicate rispettivamente per 8, 96, e 480, cioè pe' numeri che servono a ridurre la canna lineare in palmi, once e minuti lineari.

Riassumendo il fin qui detto intorno alla 3.^a operazione ne risulta che, *la moltiplicazione di due numeri complessi esprimenti misure lineari della stessa specie si esegue col metodo di prendere in parti, considerando nella formazione de' prodotti parziali l' unità principale divisa nelle sue specie secondarie come l' unità lineare, o sia non allontanandosi per nulla dalle regole date nel §. 52 per la moltiplicazione de' numeri complessi non omogenei; ottenuto così il prodotto totale, ciascuna delle specie secondarie in esso contenute si riduce in unità quadrate come un numero di unità lineari della prima specie si ridurrebbe in unità della specie secondaria corrispondente al luogo ed al nome che ha nel prodotto la quantità che vuol tradursi in misure quadrate.*

La moltiplicazione di tre numeri complessi esprimenti misure lineari della stessa specie si eseguirà moltiplicando prima fra loro due fattori come qui sopra, e poscia moltiplicando il prodotto ottenuto pel terzo fattore. Questa seconda moltiplicazione di misure superficiali per misure lineari dovrà daro nel prodotto misure cubiche, e potrà effettuarsi con una regola analoga alla precedente. Bisogna soltanto avvertire che il prodotto in misure superficiali ottenuto dalla moltiplicazione dei primi due fattori lineari deve conservarsi quale risulta dalla somma de' prodotti parziali, senza convertirne le specie secondarie in unità quadrate. Siano da moltiplicarsi fra loro le tre lunghezze complesse $5^{\text{can}} \cdot 4^{\text{pal}} \cdot 3^{\text{on}}$, $4^{\text{e}} \cdot 2^{\text{p}} \cdot 2^{\text{m}}$, $12^{\text{e}} \cdot 4^{\text{p}} \cdot 6^{\text{m}}$; si è già fatto il prodotto delle prime due, e si tratta ora di moltiplicarlo per la terza. Eseguiamo, come sopra, l'operazione nelle primo tre diverse maniere aggiungendo per ciascuna gli opportuni schiarimenti.

1.°

$$\begin{array}{r}
 23^{\circ} \frac{31}{51} \frac{9}{14} \\
 12^{\circ} \frac{9}{14} \\
 \hline
 46 \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \\
 23 \\
 \hline
 7 \frac{24}{51} \frac{8}{14} \\
 12 \frac{8}{14} \\
 \hline
 296^{\circ} \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \\
 6263^{\circ} \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \quad | \quad 8192 \\
 512 \quad 391^{\circ} \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \\
 \hline
 12526 \\
 6263 \\
 31315 \\
 \hline
 3206656^{\circ} \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \\
 74905 \\
 11776 \\
 3584 \\
 1728 \\
 \hline
 28672 \\
 7168 \\
 25088 \\
 3584 \\
 \hline
 6193152^{\circ} \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \\
 45875 \\
 49152 \\
 00000
 \end{array}$$

2.°

$$\begin{array}{r}
 23,62304687 \dots \\
 12,5625 \\
 \hline
 23,62304687 \\
 526521 \\
 \hline
 23,62304687 \\
 472460937 \\
 118115234 \\
 14173828 \\
 472461 \\
 118115 \\
 \hline
 296^{\circ} \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \quad | \quad 7645262 \\
 215 \\
 \hline
 38226310 \\
 764526 \\
 152905 \\
 \hline
 391^{\circ} \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \quad | \quad 43741 \\
 8271 \\
 \hline
 43741 \\
 30619 \\
 875 \\
 350 \\
 \hline
 755^{\circ} \frac{20}{61} \frac{7}{14} \frac{1}{2} \quad | \quad 85
 \end{array}$$

3.^o

23 ^{ca}	4 ^{pa}	11 ^{on}	4 ^{ca}	$\frac{1}{12}$
12 ^{ca}	4 ^{pa}	6 ^{on}		
46 ^{ca}				
23				

per 4 pal---6

per 1 pul-----0 . 6^{ca}per 6 on-----0 . 6^{ca}

per 3 on-----0 . 3

per 2 on-----0 . 2

per 1 min-----0 . 2^{ca} . 2^{ca}

per 1 min-----2 . 2

per 2 min-----4 . 4

per $\frac{1}{12}$ min-----0 . $\frac{1}{12}$ per 4 pal---11 . 6 . 5 . 4 $\frac{1}{12}$ per 6 on-----1 . 3 . 9 . 3 $\frac{1}{12}$ Somma. 296^{ca} . 6^{ca} . 1^{ca} . 1^{ca} $\frac{1}{12}$

64	9216	230400
384 ^{ca}	9216 ^{ca}	230400 ^{ca}
7	3636	224100
391 ^{ca}	12852 1728	454500 125
	756 ^{ca} 7	795
		450
		750
		000
		3636 ^{ca}

1.^o Nella prima operazione vi è poco da osservare. Solo faremo riflettere che, se in vece della frazione $\frac{5 \frac{1}{2}}{8 \frac{1}{2}}$ di canna quadrata fosse data la frazione complessa $39^{\frac{1}{2}} \cdot 126^{\frac{1}{2}}$, per ridurla in frazione ordinaria bisognerebbe ricordarsi che un palmo q. vale 144 once q., ed una canna q. vale 64 palmi q.; e però $126^{\frac{1}{2}}$ si cambierebbero in $\frac{1 \frac{1}{2}}{8 \frac{1}{2}} = \frac{7}{4}$ di palmo q., e $39^{\frac{1}{2}}$ pal. q. ($= \frac{3 \frac{1}{2}}{8}$ pal. q.) in $\frac{3 \frac{1}{2}}{8 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{3 \frac{1}{2}}{14}$ canne q. Per ridurre la frazione ordinaria $\frac{8 \frac{1}{2} \cdot 64}{8 \frac{1}{2} \cdot 144}$ di canna cubica in frazione complessa, si è usata la regola del §. 51 pag. 101, considerando la canna cuba composta di $8 \times 8 \times 8 = 512$ pal. cub. ed il palmo cub. di $12 \times 12 \times 12 = 1728$ once cub.

2.^o L'approssimazione del moltiplicando 23,623... si è spinta sino all'ottava cifra affinché il prodotto contenesse un errore minore di un'oncia cuba. In fatti una canna cuba contiene 8³ palmi cubi, ovvero $8^3 \times 12^3 = 884736$ once cube, e quindi il prodotto, esprimente canne cube, dovrà essere approssimato sino ad un milionesimo, perchè differisca dal vero meno di un'oncia cuba, e per la regola data a pag. 71, ciascuno dei due fattori dovrebbe estendersi sino alla ottava cifra; ma il moltiplicatore essendo esatto, ha-

sterebbe in questo caso estendere il solo moltiplicando sino alla settima cifra, attesa la piccolezza della prima cifra del moltiplicatore, e si è esteso sino all'ottava per poter eseguire la moltiplicazione col metodo abbreviato, esposto a pag. 76, di cui si è fatto uso anche nella riduzione in misure cubiche della frazione decimale annessa al prodotto, per economia ed ordine di calcolo.

3.° La moltiplicazione si è eseguita col metodo di prendere in parti senza aver nessun riguardo alle misure quadrate e cubiche, ma considerando i fattori ed i prodotti parziali come misure lineari, in quanto alla loro divisione nelle specie secondarie. In questo modo, tanto il prodotto della frazione complessa del moltiplicando per la prima specie del moltiplicatore, quanto il prodotto della frazione complessa del moltiplicatore pel moltiplicando sono risultati composti di canne cube, canne-canne-palmi, canne-canne-once e canne-canne-minuti; intendendosi per canna-canna-palmo un parallelepipedo avente per base una canna quadrata e per altezza un palmo, per canna-canna-oncia un parallelepipedo della stessa base e di un'oncia di altezza, e per canna-canna-minuto un parallelepipedo sempre della medesima base e di un minuto di altezza. Sarà facile persuadersi di questo fatto applicando alle misure cubiche il ragionamento esposto per le misure quadrate, e tenendo presente 1.° che le parti aliquote di una misura cuba, quando si considera divisa nelle sue specie secondarie come la corrispondente misura lineare, sono tanti parallelepipedi rettangoli aventi per base la principale unità quadrata e per altezze i multipli delle suddivisioni dell'unità lineare; 2.° che i prodotti di una canna lineare per canne-palmi, canne-once etc. sono parallelepipedi rettangoli simili a quelli ora indicati, cioè canne-canne-palmi, canne-canne-once etc.

Per ridurre in misure cubiche le canne-canne-palmi, canne-canne-once e canne-canne-minuti era necessario che le tre dimensioni di ciascuno di questi parallelepipedi fossero espresse per una medesima unità lineare, e però le due dimensioni della base si sono ridotte in unità della stessa specie dell'altezza. Così la canna-canna-palmo si è ridotta in palmi cubici moltiplicandola per $64=8 \times 8$, cioè riducendo in palmi lineari i due lati della canna quadrata che serve di base a quel parallelepipedo, la canna-canna-oncia si è cambiata in once cubiche moltiplicandola per $9216=96 \times 96$, ossia riducendo in once i due lati della canna quadrata che le serviva di base; e finalmente la canna canna-minuto si è ridotta in minuti cubici moltiplicandola per $230400=480 \times 480$ cioè riducendo in minuti i due lati della sua base. Per ultimare la riduzione in misure cubiche dello specie secondarie contenute nel prodotto finale, ogni oncia cubica si è considerata composta di $5^3=125$ minuti cubici, ed ogni palmo cub. di $12^3=1728$ once cub.

Dopo tutto ciò si può conchiudere che la moltiplicazione di un numero esprimente misure superficiali complesse per un altro indicante misure lineari della stessa specie si esegue col metodo di prendere in parti, considerando nella formazione de' prodotti parziali l'unità principale divisa nelle sue specie secondarie come l'unità lineare, ossia applicando esattamente a questo caso le regole date nel §. 52 per la moltiplicazione dei numeri complessi non omogenei. Ottenuto così il prodotto totale, ciascuna delle specie secondarie in esso contenute si riduce in unità cubiche come un numero di unità quadrate della prima specie si ridurrebbe in unità quadrate della specie secondaria corrispondente al vago ed al nome che ha nel prodotto la quantità che vuol tradursi in misure cubiche; per esempio si sono ridotte 6 canne-canne-palmi in palmi cubici come si ridurrebbero 6 canne quadrato in palmi quadrati, ed 1 canna-canna-oncia in once cube, come una canna quadrata in once quadrate.

Se il moltiplicando, esprimente misure superficiali, fosse dato in unità quadrate come $23^{\text{ca}} \cdot 39^{\text{pa}} \cdot 126^{\text{mi}}$, non potrebbe ritenersi sotto questa forma per eseguire la moltiplicazione col metodo di prendere in parti, ma bisognerebbe convertire la frazione complessa $39^{\text{pa}} \cdot 126^{\text{mi}}$ in canne-palmi, canne-once, e canne minuti, il che si eseguirebbe dividendo i palmi quadrati per 8, le once q. per 96 ed i minuti q. per 480, nel seguente modo;

$$\begin{array}{r}
 39^{\text{pa}} \quad \overline{) 8} \\
 \underline{7} \\
 144 \\
 \underline{1008^{\text{ca}}} \\
 126 \\
 \underline{1134} \\
 174 \\
 \underline{78} \\
 25 \\
 \underline{390} \\
 156 \\
 \underline{1950} \\
 30
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{) 96} \\
 \underline{11^{\text{ca}}} \\
 \overline{) 480} \\
 \underline{4^{\text{ca}} \cdot 2^{\text{mi}} \cdot 1^{\text{pa}}}
 \end{array}$$

dove il resto di ciascuna divisione, si è ridotto in once quadrate o minuti quadrati ed aggiunto alla quantità della stessa specie contenuta nella proposta frazione complessa, prima d'intraprendere la divisione seguente.

4.° Nell'eseguire le moltiplicazioni de' numeri complessi omogenei è preferibile spesso ridurre i fattori in unità dell'ultima specie, facendo uso però di un'abbreviazione analoga a quella accennata a pag. 103 (*). Riprendiamo gli stessi esempi trattati co' metodi precedenti, ed otterremo i prodotti di $5^{\text{ca}} \cdot 4^{\text{pa}} \cdot 3^{\text{mi}}$ per $4^{\text{ca}} \cdot 2^{\text{pa}} \cdot 2^{\text{mi}}$, e di $5^{\text{ca}} \cdot 4^{\text{pa}} \cdot 3^{\text{mi}}$ per $4^{\text{ca}} \cdot 2^{\text{pa}} \cdot 2^{\text{mi}}$ o per $12^{\text{ca}} \cdot 4^{\text{pa}} \cdot 6^{\text{mi}}$, già conosciuti, nel modo seguente.

(*) L'abbreviazione di cui si parla ci è stata additata dal valente professore di belle lettere e di matematiche, signor *Giuseppe Caccioppoli*, cui dobbiamo ancora altre utili osservazioni delle quali ci siamo avvaluti in questa terza edizione.

1.^a

$5^{\circ} . 4^{\circ} . 3^{\text{m}}$	<i>per</i>	$4^{\circ} . 2^{\circ} . 2^{\text{m}}$
$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 40 \\ 4 \\ \hline 44 \\ 12 \\ \hline 88 \\ 44 \\ 3 \\ \hline 531 \end{array}$		$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 32 \\ 2 \\ \hline 34 \\ 12 \\ \hline 68 \\ 34 \\ 2 \\ \hline 410 \end{array}$

$$\text{Prodotto} = \frac{531}{8.12} \times \frac{410}{8.12} = \frac{531.410}{8^2.12^2} = \frac{531.410}{64.144}$$

$$\begin{array}{r} 531 \\ 410 \\ \hline 5310 \\ 2124 \\ \hline 217710^{\circ} \\ 53390 \\ 5742^{\circ} \\ 1422 \\ \hline 126^{\circ} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 64 \\ \hline 576 \\ 864 \\ \hline 9216 \dots 1.^{\circ} \text{ divisore} \\ 23^{\circ} . 39^{\circ} . 126^{\circ} \\ 144 \dots 2.^{\circ} \text{ divisore} \\ 1 \dots 3.^{\circ} \text{ divisore} \end{array}$$

2.^a

$5^{\circ} . 4^{\circ} . 3^{\text{m}}$	<i>per</i>	$4^{\circ} . 2^{\circ} . 2^{\text{m}}$	<i>per</i>	$12^{\circ} . 4^{\circ} . 6^{\text{m}}$
$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 40 \\ 4 \\ \hline 44 \\ 12 \\ \hline 88 \\ 44 \\ 3 \\ \hline 531 \end{array}$		$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 32 \\ 2 \\ \hline 34 \\ 12 \\ \hline 68 \\ 34 \\ 2 \\ \hline 410 \end{array}$		$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 96 \\ 4 \\ \hline 100 \\ 12 \\ \hline 1200 \\ 6 \\ \hline 1206 \end{array}$

$$\text{Prodotto} = \frac{531}{8.12} \times \frac{410}{8.12} \times \frac{1206}{8.12} = \frac{531.410.1206}{8^3.12^3} = \frac{531.410.1206}{512.1728}$$

$$\begin{array}{r}
 531 \\
 410 \\
 \hline
 5310 \\
 2124 \\
 \hline
 217710 \\
 1206 \\
 \hline
 1306260 \\
 43542 \\
 \hline
 21771 \\
 \hline
 262558260 \\
 8561106 \\
 594820 \\
 \hline
 676404 \\
 15800 \\
 2484 \\
 \hline
 756
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1728 \\
 512 \\
 \hline
 3456 \\
 1728 \\
 \hline
 8640 \\
 \hline
 884736 \dots 1.^{\circ} \text{ divisore} \\
 296^{6^{\circ}} \cdot 391^{2^{\circ}} \cdot 756^{3^{\circ}} \\
 \hline
 1728 \dots 2.^{\circ} \text{ divisore} \\
 \hline
 1 \dots 3.^{\circ} \text{ divisore}
 \end{array}$$

Nella 1.^a operazione, considerando il dividendo 217710 come un numero di canne quadrate, ed il divisore 9216 come numero astratto, si è ottenuto il quoziente 23[°] ed il resto 5742[°], che bisognava moltiplicare al solito per 64, onde continuare l'operazione ed ottenere i palmi quadrati; ma si è diviso in vece per 64 il divisore 9216, ossia si è adottato per 2.^o *divisore* 144 preso dalla moltiplicazione de' denominatori. Ricavati a questo modo i palmi quadrati del quoziente, si sono ottenuti per resto 126 palmi quadrati, che bisognava moltiplicare per 144, a fine di ottenere le once quadrate, e qui pure si è diviso in vece il divisore per 144, cioè si è adottato per 3.^o *divisore* l'unità, il che vuol dire che l'ultimo resto 126 rappresentava già l'ultima parte del quoziente. La seconda operazione è stata eseguita con gli stessi principj, e solo conviene osservare che se, in vece di dover moltiplicare tre fattori lineari, fossero da moltiplicarsi un fattore superficiale, come 23[°] · 39[°] · 126[°], per un fattore lineare, bisognerebbe cambiare in numero incompleso quel fattore superficiale, sempre con la riduzione all'infima specie, come segue:

$$23^{\circ} \cdot 39^{\circ} \cdot 126^{\circ} = \frac{217710}{8 \cdot 12^2} = \frac{217710}{64 \cdot 144}$$

$$\begin{array}{r}
 64 \\
 \hline
 92 \\
 138 \\
 39 \\
 \hline
 1511 \\
 144 \\
 \hline
 6044 \\
 6044 \\
 \hline
 1511 \\
 126 \\
 \hline
 217710
 \end{array}$$

dove non si è fatto che applicare le regole generali (pag. 98, 186), avvertendo soltanto di distinguere, nel denominatore i fattori quadrati dei numeri indicanti le suddivisioni dell'unità lineare.

IV. La divisione delle quantità complesse superficiali o cubiche per quantità complesse lineari o superficiali della stessa specie si esegue, riducendo le frazioni complesse unite al dividendo ed al divisore in frazioni ordinarie o in frazioni decimali, e tenendo presente ciò che si è detto nel n.º I intorno alla natura del quoziente; diamone un esempio. Sia da dividersi $296^{\text{can. cub.}} \cdot 391^{\text{p. c.}} \cdot 756^{\text{enc. cub.}}$ per $12^{\circ} \cdot 4^{\circ} \cdot 6^{\circ}$; l'operazione potrà eseguirsi nelle due indicate maniere come qui appresso;

Prima.

$296^{\text{can. cub.}}$	$391^{\text{p. c. cub.}}$	$756^{\text{enc. cub.}}$	$12^{\circ} \cdot 4^{\circ} \cdot 6^{\circ}$
$296^{\frac{296}{2192}}$	$391^{\frac{7}{14}}$	$756 = \frac{7}{16}$	$12^{\circ} \cdot 4^{\circ} \cdot 6^{\circ}$
<u>592</u>	<u>2346</u>	<u>1728</u>	<u>$\frac{4^{\circ}}{2}$</u>
2664	3917		72
296	<u>6263</u>	6263	<u>129</u>
2368	$16^{\text{p. c.}} = 16 \times 512$	16×512	201
<u>6263</u>			<u>$\frac{201 \times 512}{16}$</u>
2431095	102912		
<u>8192</u>	<u>8192</u>		
2431095	102912		
372855	$23^{\circ} 39^{\circ} 126^{\circ}$		
<u>64119^{\circ}</u>			
64			
<u>256476</u>			
384714			
<u>4103616</u>			
1016256			
<u>90048^{\circ}</u>			
144			
360192			
<u>360192</u>			
90048			
<u>12966912</u>			
267571			
<u>617472</u>			
000000			

Seconda.

296 ^{can.cub}	391 ^{pal.cub}	756 ^{m.cub}	12° . 4° . 6°
7560 6480 12960 8640 0000	1728 0° . 4375 391 . 4375 33 03 2 317 2695 135	512 0° . 7645 296 7645 45 5145 7 82700 28950 3825 56 6	12° . 4° . 6° 4,5 8 50 0,5625 20 40 00
			12,5625 23° . 62304 46 373824 24922 59° . 8746 441 8746 3498 559 125° . 194

Prima. Dopo aver ridotti il dividendo ed il divisore in frazioni ordinarie dello stesso denominatore si è eseguita la divisione su i numeratori; e siccome il quoziente doveva esprimere canne quadrate, così si è considerato il dividendo come un numero di canne quadrate ed il divisore come numero astratto. Il primo resto della divisione esprime canne quadrate si è ridotto in palmi quadrati moltiplicandolo per 64, e si è continuata la divisione; e così puro de' palmi quadrati, che si son ridotti in once quadrate moltiplicandoli per 144.

Seconda. Si sono ridotte le once cube in frazione decimale di palmo cubo, ed i palmi cubici in frazione decimale di canna cuba; la prima riduzione ha dato un quoziente esatto, e nella seconda si è spinta l'approssimazione sino a quattro cifre decimali per la seguente ragione. Supponendo che il risultamento della proposta divisione di canne cube per canne lineari si volesse esatto sino a differire dal vero meno di un'oncia quadrata, ossia meno di $\frac{x}{2512}$ di canna quadrata, l'approssimazione del quoziente doveva estendersi sino ai diecimillesimi; ma volendo eseguire la divisione col metodo abbreviato esposto a pag. 77, si è stabilita l'approssimazione a 0,00001. Su questo dato si è cercata l'approssimazione da darsi al dividendo, ma la regola della pag. 72 non era applicabile al caso attuale in cui il divisore è esatto ed il dividendo è approssimato; nulladimeno dalla discussione fatta nella nota alla pagina stessa risulta che, quando il divisore è esatto ed il dividendo approssimato, l'ultima cifra da ritenersi nel dividendo deve esser minore del doppio del divisore moltiplicato per l'unità indicante l'approssimazione del quoziente (*), onde si è esteso il dividendo 296,76... sino ai dieci-

(*) La formola generale $\frac{x}{a} + \frac{Dy}{a^2} < 27$ (esprimente la condizione che deve essere adempita nell'assegnare i valori delle unità x , y da ritenersi

millesimi. La frazione 0,62304 di canna quadrata si è ridotta in palmi quadrati ed once quadrate eseguendo le moltiplicazioni per 64 e per 144 col metodo abbreviato.

Ciò che abbiamo detto in questo §. del calcolo delle quantità espresse in unità quadrate e cubiche, servendoci per esempio dell'antica canna napoletana, potrà applicarsi facilmente a qualunque altra misura complessa, e bisognerà soltanto badare al significato ed al valore che hanno le frazioni dell'unità quadrata o cubica quando si suppongono divise come l'unità lineare nelle loro specie secondarie. Così supponendo la tesa quadrata divisa e suddivisa come la tesa lineare, ne risulteranno la *tesa-piede* equivalente a 6 piedi quadrati, la *tesa-pollice* che vale $6 \times 12 = 72$ pollici quadrati e la *tesa-linea* che comprende $6 \times 12 \times 12 = 864$ linee quadrate; e similmente la tesa cuba divisa come la tesa lineare nelle sue specie secondarie darà origine alla *tesa-tesa-piede* equivalente a $6 = 36$ piedi cubi, alla *tesa-tesa-pollice* che vale $6 \times 12 = 72 = 5184$ pollici cubi, ed alla *tesa-tesa-linea* che contiene $6 \times 12 \times 12 = 864 = 746496$ linee cubiche.

§. 85.

Regole generali per determinare i rapporti delle misure, applicate al paragone del sistema metrico di Napoli e di Sicilia col sistema metrico francese.

1. Se di un rapporto indicante il valore di una unità di misura in parti di un'altra si prende l'espressione reciproca,

nel dividendo e nel divisore) quando il divisore è esatto, cioè quando $\frac{x}{d}y = 0$, diviene $\frac{x}{d} < 2q$, ovvero $x < 2dq$, che corrisponde alla regola data qui sopra. Nel caso che tanto il dividendo quanto il divisore fossero approssimati, come può accadere in una operazione analoga a quella eseguita superiormente, la formola $\frac{x}{d} + \frac{Dy}{d^2} < 2q$ potrà scomporsi nelle due, $\frac{x}{d} < q$, $\frac{Dy}{d^2} < q$, ovvero

$$x < dq, \quad yD < d^2q,$$

dalle quali si ricava la regola generale applicabile a tutti i casi che, nella divisione l'approssimazione del dividendo dovrà regolarsi in modo che un'unità dell'ordine dell'ultima cifra da ritenersi sia minore del prodotto del divisore per l'unità stabilita per l'approssimazione del quoziente; e l'approssimazione del divisore dovrà esser tale che una unità dell'ordine dell'ultima cifra da ritenersi moltiplicata pel dividendo risulti minore del divisore moltiplicato per se stesso e per l'unità indicante l'approssimazione del quoziente. Qui ancora, come nella moltiplicazione (pag. 71), i valori d' x , y determinati per mezzo delle due condizioni isolate potranno riuscire più piccoli di quelli che si otterrebbero

dalla condizione complessiva $\frac{x}{d} + \frac{yD}{d^2} < 2q$, che contenendo due indeterminate potrebbe esser soddisfatta in diversi modi; ma non ne soffrirà perciò l'esattezza del quoziente, e si abbonderà anzi in precauzione.

questa indicherà il valore della seconda unità di misura in parti della prima. Sapendosi, per esempio, che $1^{\text{metro}} = 3,78 \text{ palmi}$, se ne potrà subito conchiudere che $1^{\text{palmo}} = \frac{1}{3,78} \text{ metri}$; o altrimenti, sapendosi che $1^{\text{metro}} = \frac{3}{8} \text{ palmi}$, se ne conchiuderà che $1^{\text{palmo}} = \frac{8}{3} \text{ di metro}$. È facile dar ragione di questa regola osservando che la proposta uguaglianza si può sempre cangiare in una proporzione; in fatti, in vece di $1^{\text{metro}} = 3,78 \text{ palmi}$, si può scrivere $1 \times 1^{\text{metro}} = 3,78 \times 1^{\text{palmo}}$, e questa uguaglianza di due prodotti si cambia (§. 55) nella proporzione $1^{\text{metro}} : 1^{\text{palmo}} :: 3,78 : 1$, da cui, per la regola del tre, si ricava $1^{\text{palmo}} = \frac{1}{3,78} = \frac{1}{3,78} \text{ metri} = 0^{\text{mi}}, 26455...$ Ecco altri esempi.

Allorchè in Francia fu stabilita legalmente la misura del metro, convenne definirla per mezzo di una misura già esistente a tutti nota, come la tesa con le sue suddivisioni, e si disse, $1^{\text{metro}} \text{ vale } 3^{\text{pie}} . 0^{\text{po}} . 11^{\text{li}}, 296$; da questo rapporto, rovesciandolo, si ricava la tesa espressa in parti del metro, ma nel caso attuale bisogna prima ridurre la frazione complessa di tesa $3^{\text{pi}} . 0^{\text{po}} . 11^{\text{li}}, 296$ in frazione decimale. Per ciò che si è detto nel §. 51 sarà,

$3^{\text{pi}} . 0^{\text{po}} . 11^{\text{li}}, 296 = 0^{\text{mi}}, 513074$, e quindi $1^{\text{metro}} = 0,513074 \text{ tese}$, ed

$$1^{\text{tesa}} = \frac{1}{0,513074} \text{ met} = \frac{1000000}{513074} \text{ met} = 1,949037 \text{ metri}.$$

Si è veduto (§. 82) che $1 \text{ palmo siciliano} = \frac{4}{11} \text{ pal. nap.}$; da questo rapporto si desume che $1^{\text{pal. nap.}} = \frac{4}{11} \text{ pal. sic.}$, onde

$$1^{\text{pal. sic.}} = 0^{\text{po}} . 9756098, \text{ ed } 1^{\text{pal. nap.}} = 1^{\text{po}} . 025.$$

Essendo un rotolo napolitano eguale a $0^{\text{chi}}, 890997$, il valore del chilogrammo in parti del rot. sarà $\frac{1}{0,890997}$, cioè $1^{\text{rot.}} = 1^{\text{po}}, 122338$.

2. Quando la relazione sussistente fra due misure è espressa da una equivalenza, come $100 \text{ metri} = 378 \text{ palmi napolitani}$, $41 \text{ pal. sic.} = 40 \text{ pal. nap.}$, e simili, se ne può sempre dedurre il valore di una delle unità di misura in parti dell'altra e viceversa, dividendo i due membri dell'uguaglianza pel moltiplicatore dell'unità che si cerca. Così dalla prima equivalenza si ricavano le due relazioni,

$$\frac{100 \text{ metri}}{378} = \frac{100}{378} \text{ palmi}, \text{ ossia } 1^{\text{metro}} = \frac{378}{100} \text{ pal.}, \text{ ed } 1^{\text{palmo}} = \frac{100}{378} \text{ metri};$$

e dalla seconda

$$1^{\text{pal. sic.}} = \frac{4}{11} \text{ pal. nap.}, \text{ ed } 1^{\text{pal. nap.}} = \frac{11}{4} \text{ pal. sic.}$$

La ragione di questa pratica non è diversa da quella esposta qui sopra, la quale si era altronde già accennata nei §§. 73 ed 83.

Per un altro esempio, 46 galloni (misura inglese di capacità) equivalgono a 209 litri , e quindi $1^{\text{gallone}} = \frac{209}{46} \text{ litri} = 4^{\text{ari}}, 5435$, ed $1^{\text{litro}} = \frac{46}{209} \text{ gal.} = 0^{\text{gal.}}, 2201$

3. Dati i valori di due diverse unità di misura in parti di una terza, si ricava il valore di una di quelle due unità in parti dell'altra, e viceversa, dividendo rispettivamente uno per l'altro i due valori dati. Un palmo napolitano equivale a $0^{\text{mi}}, 26455$ ed un

pie de francese a $0^{\text{me}}, 32484$; quindi $1^{\text{pal}} : 1^{\text{ped}} :: 0,26455 : 0,32484$, e per la regola del tre, $1^{\text{pal}} = \frac{0,32484 \times 0,26455}{0,26455} \text{ pied}$, ed $1^{\text{ped}} = \frac{0,26455 \times 0,32484}{0,26455} \text{ pal}$, cioè

$$1^{\text{palmo}} = \frac{0,32484 \times 0,26455}{0,26455} \text{ pied} = 0^{\text{me}}, 81440, \text{ ed } 1^{\text{pied}} = 1^{\text{pal}}, 22789.$$

Similmente, si sa che

$$\begin{aligned} 1^{\text{metro}} &= 3,78 \text{ pal. nap.}, \text{ ed } 1^{\text{pal. nap.}} = \frac{1}{3,78} \text{ pal. nap.}, \text{ dunque} \\ 1^{\text{metro}} &= 3,78 : \frac{4}{1} \text{ pal. sic.} = 3,8745 \text{ pal. sic.} \text{ ed} \\ 1^{\text{pal. sic.}} &= \frac{4}{1} : 3,78 \text{ met} = 0^{\text{me}}, 258098. \end{aligned}$$

Questa regola serve a trovare il rapporto di due misure qualunque, quando si abbia una *Tavola* nella quale le misure di diversi paesi siano espresse in parti di una medesima unità. Così nella *Tavola di misure* riportata in fine di questi *Elementi* si trova che il *pie de* di Parigi eguaglia $0^{\text{me}}, 32484$, o l'*yard* inglese $0^{\text{me}}, 91438$, e però $1^{\text{pied}} = \frac{0,32484 \times 0,91438}{0,91438} \text{ yards}$, ed $1^{\text{yard}} = \frac{0,91438 \times 0,32484}{0,32484} \text{ piedi}$: cioè per trovare una misura espressa in parti di un'altra, si divide sempre il suo valore riportato nella *Tavola* per quello della seconda misura.

4. Se due misure non sono paragonate immediatamente fra loro o ad una terza, ma hanno relazioni conosciute con altre misure intermedie, allora per trovare il rapporto fra la prima e l'ultima misura bisognerà servirsi della regola congiunta esposta nel §. 73. Ecco alcuni esempi.

Si vuol trovare il valore del palmo siciliano in parti del metro servendosi delle seguenti relazioni

100 metri equivalgono a 378 palmi nap.

40 pal. nap. a 41 pal. sic.

1 pal. sic. ad x metri;

per ciò che si è detto nel citato §. 73, sarà

$$x = \frac{100 \times 40}{378 \times 41} = 0^{\text{me}}, 258098.$$

A questo stesso risultamento eravamo già pervenuti applicando le regole 2,3 date di sopra.

Si vuol trovare il rapporto fra la tesa francese e la canna siciliana per mezzo delle relazioni seguenti;

157 tese equivalgono a 306 metri.

100 metri a 378 palmi nap.

40 pal. nap. a 41 pal. sic.

8 pal. sic. ad 1 canna sic.

1 can. sic. ad x tese;

$$\text{sarà, } x = \frac{157 \times 100 \times 40 \times 8}{306 \times 378 \times 41} = 1^{\text{me}}, 0594.$$

Non sarà inutile osservare che le regole 2, 3 applicate ripetutamente potrebbero bastare a risolvere il problema. Dalle prime due equivalenze si ricavano, per la regola 2, la tesa espressa in metri ed il palmo nap. espresso anche in metri, cioè $1^{\text{ma}} = \frac{3.06}{1.57} m$, $1^{\text{na}} = \frac{1.00}{1.57} m$, e quindi, per la regola 3, si otterrà la tesa espressa in palmi napolitani ossia $1^{\text{ma}} = \frac{3.06}{1.57} : \frac{1.00}{1.57} p.n = \frac{3.06 \cdot 1.57}{1.57 \cdot 1.00} p.n$; dalla terza equivalenza potendo aversi anche il palmo siciliano espresso in palmi nap., cioè $1^{\text{ma}} = \frac{4.0}{1.57} p.n$, si ricava similmente la tesa espressa in palmi sic., vale a dire $1^{\text{ma}} = \frac{3.06 \cdot 1.57}{1.57 \cdot 1.00} : \frac{4.0}{1.57} p.s = \frac{3.06 \cdot 1.57 \cdot 1.57}{1.57 \cdot 1.00 \cdot 4.0} p.s$; e finalmente la quarta equivalenza offrendo la canna siciliana espressa pure in palmi sic., se ne conchiuderà la canna espressa in tese che risulterà eguale ad 8: $\frac{3.06 \cdot 1.57 \cdot 1.57}{1.57 \cdot 1.00 \cdot 4.0} = \frac{3.06 \cdot 1.57 \cdot 1.57}{3.06 \cdot 1.57 \cdot 1.57 \cdot 4.0}$, come qui sopra.

I principii ora esposti, avvalorati in ciò che riguarda le misure quadrate e cubiche da quanto si è detto ne' due §§. precedenti, bastano a risolvere qualunque quistione concernente i rapporti delle misure.

Continuando il paragone delle misure metriche con quelle del Regno, si vogliano conoscere i rapporti dell'Ara col nuovo Moggio napolitano, e con la Salma di Sicilia. L'Ara, il Moggio e la Salma sono tre quadrati che hanno rispettivamente per lati, 10 metri, 100 palmi napolitani, e 64 canne ovvero 512 palmi siciliani: si riducano in palmi napolitani i metri e i palmi siciliani, ed i lati dei tre quadrati saranno 37,8, 100, $\frac{3.04 \cdot 64}{4.0}$; quindi il lato dell'Ara sta al lato del Moggio come 37,8 : 100 :: 18,9 : 50, ed il lato dell'Ara sta al lato della Salma come 37,8 : $41 : 20480 : 774,9 : 10240$. Ma i rapporti fra le misure quadrate sono i quadrati de' rapporti esistenti fra i loro lati (§. 83), dunque

Ara : Moggio :: (18,9)² : 50², ed Ara : Salma :: (774,9)² : 10240², cioè

$1^{\text{ara}} : 1^{\text{moggio}} :: 357,21 : 2500$; e dividendo i termini della seconda ragione per 357,21, o per 2500 si avrà

$1^{\text{ara}} : 1^{\text{moggio}} :: \frac{357,21}{357,21} : \frac{2500}{357,21} :: \frac{357,21}{2500} : \frac{2500}{357,21} :: 1 : 6,998684 : 0,142884 : 1$;

similmente

$1^{\text{ara}} : 1^{\text{salma}} :: 600470,01 : 104857600 :: 1 : 174,625873 : 0,00572653 : 1$

Le quali proporzioni danno subito (§. 56),

$$\begin{aligned} 1^{\text{moggio}} &= 6^{\text{ara}} \cdot 998684, & 1^{\text{ara}} &= 0^{\text{moggio}} \cdot 142884, \\ 1^{\text{salma}} &= 174^{\text{ara}} \cdot 625873, & 1^{\text{ara}} &= 0^{\text{salma}} \cdot 00572653. \end{aligned}$$

E poichè il moggio e la salma sono ambedue valutati in aro, potrà aversi il moggio in parti della salma e viceversa con la regola 3; sarà

$$1^{\text{moggio}} = \frac{60047001}{174625873}, \quad 1^{\text{salma}} = \frac{174625873}{60047001}$$

Ma questi ultimi rapporti si ottengono più semplicemente dal rapporto dei lati del moggio e della salma che è quello de' numeri 100 : $\frac{3.04 \cdot 64}{4.0}$, ovvero 4100 : 20480, ossia 205 : 1024; e però

$1^{\text{moggio}} : 1^{\text{salma}} :: 205^2 : 1024^2 :: 42025 : 1048576 :: 1 : 0,0400782 : 24,951243 : 1$ da cui

Moggio nuovo nap = $0^{\text{salma}} \cdot 0400782$; Salma sic = $24^{\text{moggio}} \cdot 951243$.

Dunque un nuovo moggio napolitano differisce pochissimo da 7 aro fraucesi, e contentandosi di una certa approssimazione, può dirsi ancora che la salma di Sicilia equivale a 25 moggi nuovi nap.

Per un altro esempio, sapendosi che un metro eguaglia 3^{linee}_{10} , 1^{linea}_{12} , 296 , ed un palmo napolitano corrisponde a $0^{\text{palmi}}_{81440} = 9^{\text{pollici}}_{274}$, si voglia trovare il metro quadrato o il palmo quadrato espresso in piedi, pollici, e linee quadrati; bisognerà a tal fine innalzare a quadrato il numero complesso indicante quel valore del metro o del palmo, e per ciò che si è detto nel §. 84 si avrà

$$1 \text{ metro quad} = 9^{\text{palmi}}_{1.68^{\text{pollici}}_{951.3}}; \quad 1 \text{ palmo quad} = 9^{\text{palmi}}_{1.73^{\text{pollici}}_{1.1}}$$

Passiamo al paragone delle misure di capacità. A tal fine troviamo i rapporti fra il cubo del decimetro, il cubo del palmo napolitano, ed il cubo del palmo siciliano. Un metro vale 3,78 palmi nap. ed un decimetro 0,378 pal., ma un palmo siciliano equivale a $\frac{4}{5}$ di pal. nap., dunque

$$\text{decimetro} : \text{palmo nap.} :: 0,378 : 1 :: 1,89 : 5, \text{ c}$$

$$\text{decimetro} : \text{palmo sic.} :: 0,378 : \frac{4}{5} :: 7,749 : 20$$

E poichè le unità cubiche stanno fra loro come i cubi delle rispettive unità lineari (§. 83), sarà

$$\text{dec. cub.} : \text{pal. nap. cub.} :: (1,89)^3 : 5^3 :: 6,751269 : 125 \\ :: 0,0540102 : 1 :: 1 : 18,5150377$$

$$\text{dec. cub.} : \text{pal. sic. cub.} :: (7,749)^3 : 20^3 :: 465,30421... : 8000 \\ :: 0,0581630 : 1 :: 1 : 17,193053$$

Da queste proporzioni, ricordandosi che il decimetro cubo corrisponde al litro, ed il palmo cubo siciliano al tomolo siciliano, si ricaveranno i seguenti rapporti

$$1^{\text{litro}} = 0,0540102 \text{ pal. cub. nap.}, \quad 1^{\text{pal. c.}} = 18^{\text{litri}}_{5150377}$$

$$1^{\text{litro}} = 0,058163 \text{ pal. cub. sic.}, \quad 1^{\text{tomolo}} = 17^{\text{litri}}_{193053};$$

ma un tomolo napolitano eguaglia tre palmi cubici, dunque

$$1^{\text{tom. nap.}} = 55^{\text{litri}}_{5451131}, \quad 1^{\text{litro}} = 0,0180034 \text{ tom. nap.}$$

Il rapporto de' tomoli napolitano e siciliano sarà, per la regola 3, quello de' numeri 55,5451131 e 17,193053 esprimenti i loro valori in litri, o più esattamente e semplicemente quello di 3 pal. cubi nap. al cubo di $\frac{4}{5}$ di palmo, cioè di $3 : (\frac{4}{5})^3$, ossia di 206763 : 64000; e quindi

$$1^{\text{tom. nap.}} = 3,230672 \text{ tom. sic.}; \quad 1^{\text{tom. sic.}} = 0,309533 \text{ tom. nap.}$$

Il barile napolitano, secondo la sua definizione corrisponde al cilindro iscritto nel parallelepipedo rettangolo rappresentante il tomolo: il rapporto della capacità del tomolo alla capacità del barile sarà perciò quello delle basi de' due solidi, ovvero il rapporto di un quadrato al cerchio in esso iscritto. Ora è noto dalla Geometria che il quadrato sta al cerchio iscritto come 4 : π , indicando con π il rapporto del diametro alla circonferenza, che ha per valore 3,1415926536....: dunque il tomolo sta al barile come 4 : 3,14159....: 1 : 0,785398163 :: 1,2732395 : 1, o quindi

$1^{\text{tom.}} = 1,2732395 \text{ barili}$, $1^{\text{barile}} = 0,7853982 \text{ tom.} = 2,3561945 \text{ palmi cubi}$. Se in quest'ultima relazione si sostituirà al tomolo il corrispondente numero di litri, si avrà la capacità del barile espressa anche in litri, cioè

$$1^{\text{barile}} = 0,785398163 \times 55^{\text{litri}}_{5451131} = 43^{\text{litri}}_{6250298};$$

e si avverte che per ottenere questo valore, esatto sino alla settima cifra decimale si è dovuto estendere il moltiplicatore 0,785 sino alla nona, per ciò che si è detto a pag. 76.

Il quartaro di Sicilia, essendo eguale in capacità al tomolo, corrisponderà come quello a litri 17,193053, ed il barile essendo composto di due

quartari, eguaglierà litri 34,386106; quindi il rapporto del barile siciliano al barile napoletano sarà di 34,386106 : 43,62503, onde

$$1_{\text{bar. sic}} = \frac{34,386106}{43,62503} = 0,7882196 \text{ b. n.}; 1_{\text{bar. nap}} = \frac{43,62503}{34,386106} = 1,2686819 \text{ b. s.}$$

Il *gallone* inglese equivale a litri 4,543458, e quindi il suo rapporto al barile napoletano sarà quello de' numeri 4,543458 : 43,6250298 per cui si avrà

$$1_{\text{gallone}} = 0_{\text{bar}}, 104148; 1_{\text{barile}} = 9_{\text{gal}}, 601724.$$

Paragoniamo finalmente i pesi di Napoli e di Sicilia con quelli di Francia e d'Inghilterra. L'unità di peso si fa sempre dipendere dall'unità lineare prendendo per modulo un determinato volume di acqua distillata considerata in date circostanze, e così sono stabiliti il chilogrammo ed il rotolo; il chilogrammo corrisponde ad un decimetro cubo di acqua distillata pesato nel vuoto, ed alla temperatura di 4,108 gradi centigradi, alla quale l'acqua ha la sua massima densità, ed il rotolo corrisponde alla dodicesima parte di un volume di acqua distillata equivalente al cubo di $\frac{5}{6}$ di palmo pesato nell'aria alla temperatura di $16\frac{1}{6}$ gradi centigradi, e sotto la pressione barometrica di 28 pollici. Or se il rotolo napoletano fosse determinato per mezzo del palmo col paragone di un volume di acqua distillata, considerata nelle medesime circostanze in cui si suppone per la determinazione del chilogrammo, è chiaro che il rapporto del chilogrammo al rotolo dovrebbe esser lo stesso di quello de' volumi di acqua distillata ai quali corrispondono; quindi il chilogrammo starebbe al rotolo come il cubo del decimetro ad $\frac{1}{12}$ del cubo di $\frac{5}{6}$ di palmo. Ma quantunque ciò a rigore non si verifichi, pure il rapporto degl'indicati volumi non dovrà allontanarsi molto dal vero rapporto dei pesi corrispondenti. Per determinarlo, ricordiamoci che 1 *palmo* = $\frac{1}{3}\frac{6}{6}$ di metro, e quindi $\frac{5}{6}$ di *palmo* = $\frac{5}{2}\frac{0}{6}\frac{0}{6}$ met. = $\frac{5}{2}\frac{0}{6}\frac{5}{6}$ met.; dunque un rotolo sta ad un chilogrammo come la dodicesima parte del cubo di $\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}$ di metro sta al cubo di 0,1 di metro, ossia come $\frac{1}{12} \times (\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6})^3$ di met. cubo sta a 0,001 di met. cubo, ovvero come 1000 $\times \frac{1}{12} \times (\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6})^3$: 1. Fatto il calcolo si trova che il rotolo sta al chilogrammo come 0,8928934 : 1, onde un rotolo sarebbe eguale a 0^{ca},8928934. La legge del 6 Aprile assegna però al rotolo il valore di 0^{ca},899997 minore del precedente per 0^{ca},0018964, e questa differenza è dovuta alla diversità delle circostanze in cui si suppone pesata l'acqua nelle due determinazioni del rotolo e del chilogrammo.

Affinchè il paragone del rotolo e del chilogrammo riesca esatto, si debbono applicare al precedente valore 0^{ca},8928934 del rotolo due correzioni, cioè 1.º il volume dell'acqua distillata corrispondente ad un rotolo, che alla temperatura di $16\frac{0}{6}$ era $\frac{1}{12} \times (\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6})^3 = 0,0008928934$ di metro cubo, si deve ridurre alla temperatura di 4º,108 adottata pel chilogrammo, 2.º il peso del volume di acqua distillata corrispondente al rotolo nell'aria, deve poi principii di Meccanica, accrescersi del peso di un egual volume di aria spostato per ridurlo al vuoto, come il chilogrammo.

1.º Il sig. *Hallstrom* con accuratissime esperienze ha determinato le densità dell'acqua da 0º del termometro centigrado sino a 30º. Dalla tavola da lui redatta (veggansi i trattati di fisica di *Pouillet* o di *Despretz*) si ricava facilmente la densità dell'acqua a $16\frac{0}{6}$, la quale risulta 0,99910087, supponendo eguale ad 1 la massima densità, che si verifica a 4º,108. E poichè passando una massa d'acqua da una temperatura ad un'altra, i volumi che occupa successivamente sono in ragione inversa delle densità, per calcolare il volume che prenderà a 4º,108 la quantità di acqua che a $16\frac{0}{6}$ corrisponde al rotolo, ed ha per volume 0,0008928934 di metro cubo, si farà la proporzione

$$1 : 0,99910087 :: 0,0008928934 : x = 0,00089209057 \text{ met. cub.}$$

2.° I signori *Biot* ed *Arago* hanno trovato, con delicati e ripetuti esperimenti, che un litro di aria secca alla temperatura di 0° centigradi, sotto la pressione barometrica di 28 pollici, ed alla latitudine media di 45° pesa $1^{\text{er}}, 2991$, ed il sig. *Biot* ha pure dimostrato nel suo trattato di Fisica che, per riportare questo valore ad una latitudine qualunque L , deve moltiplicarsi per $1 - 0,002837 \cos 2L$; per la qual cosa un litro di aria a 0° centigradi e sotto la pressione di 28 pollici pesa in Napoli (la cui latitudine è 40°. 50'. 30'') $1^{\text{er}}, 29857$. Partendo da questo dato bisogna valutare il peso di un volume di aria eguale a 0,0008928934 di met. cub., ossia a $0^{\text{mi}}, 8928934$, sotto la medesima pressione di 28 pollici ed alla temperatura di $16^{\circ} \frac{5}{8}$, cioè nelle circostanze adottate per la determinazione del rotolo; ed è chiaro che non variando la pressione si dovrà aver riguardo soltanto al cambiamento di temperatura. Ora, siccome un gas qualunque si dilata $\frac{1}{273}$ del suo volume per ogni grado del termometro centigrado fra 0° e 100°, così un litro d'aria considerato alla temperatura di 0° diviene $1^{\text{er}} + \frac{1}{273}$ ad 1 grado, e diviene $1^{\text{er}} + 16 \frac{5}{8} \times \frac{1}{273}$ a $16^{\circ} \frac{5}{8}$, cioè $1^{\text{er}}, 060625$; ma 1 litro d'aria a 0° pesa $1^{\text{er}}, 29857$ in Napoli, dunque $1^{\text{er}}, 060625$ d'aria a $16^{\circ} \frac{5}{8}$ avrà lo stesso peso, e quindi un solo litro

d'aria a $16^{\circ} \frac{5}{8}$ peserà $\frac{1^{\text{er}}, 29857}{1,060625} = 1^{\text{er}}, 224344$. Un volume d'aria di $0^{\text{mi}}, 8928934$,

nelle stesse circostanze di pressione e di temperatura, peserà per conseguenza $0,8928934 \times 1^{\text{er}}, 224344 = 1^{\text{er}}, 09321$; e questo peso aggiunto ad un rotolo napolitano rappresenterà il peso nel vuoto della quantità di acqua distillata che nell'aria corrisponde al rotolo.

Ciò posto si conoscono, 1.° il volume che a 4°, 108 acquista la quantità d'acqua distillata che nell'aria equivale in peso al rotolo napolitano, ed è 0,00089209057 di met. cub., 2.° il peso di questo volume di acqua nel vuoto, cioè $1^{\text{er}}, 09321$; ma un chilogrammo è il peso nel vuoto di 0,001 di metro cubo di acqua distillata alla temperatura 4,108, ed è altroade evidente che i volumi di acqua distillata, nelle medesime circostanze, debbono essere proporzionali ai loro pesi, dunque si avrà

$$0,001 : 0,00089209057 :: 1^{\text{chil}} : 1^{\text{er}} + 1^{\text{er}}, 09321 ;$$

dalla quale proporzione si ricava subito

$$1^{\text{er}} + 1^{\text{er}}, 09321 = 0^{\text{ch}}, 89209057, \text{ ed in fine}$$

$$1^{\text{er}} = 0^{\text{ch}}, 89209057 - 1^{\text{er}}, 09321 = 0^{\text{ch}}, 890997 ,$$

come è indicato nella legge del 6 Aprile 1840.

Avremmo tralasciato volentieri il calcolo precedente che dipende da principii estranei all'Aritmetica, ma essendoci proposti di dichiarare le disposizioni della legge del 6 Aprile, in ciò che riguarda la scienza, c'interessava di mostrare l'esatta coincidenza delle due diverse determinazioni del rotolo indicate in quello importante atto sovrano.

Conoscendosi il valore del rotolo in parti del chilogrammo, per la regola 1 si è già trovato quello del chilogrammo in parti del rotolo, cioè

$$1^{\text{chil}} = 1,122338 \text{ rot. nap. ; e quindi}$$

$$100^{\text{chil}} = 112,2338 \text{ rot. n. , e } 1000^{\text{chil}} = 1122,338 \text{ rot. n. , ossia}$$

$$1 \text{ quintale metrico} = 1,122338 \text{ cantaja nap. , ed}$$

$$1 \text{ tonnellata metrica} = 11,22338 \text{ cantaja nap.}$$

Dall'*Annuaire du Bureau des longitudes* si desume che la libbra inglese detta *troy* equivale a $0^{\text{chil}}, 373096$. Questa libbra si divide in 12 once o in 5760 grani, 7000 de'quali formano la libbra maggiore detta *avoirdupois*;

la libbra *avoirdupois* equivale perciò a $0^{\text{ca}},373096 \times \frac{7000}{31116} = 0^{\text{ca}},453415$.
 Con questi dati sarà facile trovare il rapporto fra il rotolo napolitano ed i pesi inglesi, poichè essendo un rotolo eguale a $0^{\text{ca}},890997$, per la regola 3 si avrà

$$1^{\text{rot. n.}} = \frac{890997}{31116} = 2,88118 \text{ lib. troy.}, \text{ ed}$$

$$1^{\text{rot. n.}} = \frac{890997}{481415} = 1,965080 \text{ lib. avoirdupois.}$$

Inoltre un *quintale* inglese è composto di 112 libbre *avoirdupois*; ma un cantajo napolitano equivale a 196,5080 delle stesse libbre, dunque per l'indicata regola 3 sarà

$$1^{\text{cant. nap.}} = \frac{1965080}{112} = 1,754535 \text{ quintali ingl.}$$

In fine una *tonellata* inglese componendosi di 20 quintali, un cantajo napolitano eguaglierà $\frac{1754535}{20} \text{ tonel.}$, e quindi

$$1^{\text{cant. n.}} = 0,0877268 \text{ tonellate ingl.};$$

e per la regola 1 si avrà

$$1^{\text{cant. ingl.}} = \frac{1}{0,0877268} = 11,39903 \text{ cantaja nap.}$$

Con un procedimento affatto simile, dal valore 0,79342 del rotolo di Sicilia in parti del chilogrammo (§. 80), si ricaveranno i seguenti rapporti coi pesi metrici e con gl'inglesi

$$1 \text{ chilogrammo} = 1,260366 \text{ rot. sicil.}$$

$$1^{\text{quint. met.}} = 1,260366 \text{ cant. sicil.}; 1^{\text{ton. met.}} = 12,60366 \text{ cant. sic.}$$

$$1 \text{ lib. avoirdupois inglese} = 0,571470 \text{ rot. sic.}$$

$$1^{\text{cant. sicil.}} = 1,56239 \text{ quint. ingl.}; 1^{\text{ton. ingl.}} = 12,80092 \text{ cant. sic.}$$

§. 86.

Rapporti semplici approssimati dedotti dai rapporti esatti. Tavole.

Un rapporto fra due misure qualsivogliano può tenersi per esatto quando la sua approssimazione si estende sino ad una parte così piccola dell'unità da potersi appena apprezzare coi migliori mezzi fisici che si conoscono. Ma un tal rapporto è quasi sempre molto complicato, e spesso per formarsi un'idea chiara ed immediata della relazione esistente fra due misure, si desidera un rapporto più semplice quantunque meno esatto. Il metodo accennato nel §. 21 di sviluppare una frazione qualunque in frazione continua, e dedurne una serie di frazioni ordinarie più semplici della frazione proposta, può servire all'oggetto. Noi lo abbiamo applicato ai principali rapporti delle misure del Regno colle straniere, ed i risultamenti de' calcoli sono riportati in fine della seguente *Tavola di misure*.

TAVOLA DI MISURE (1).

<i>Misure lineari per gli usi comuni.</i>		METRI.	PAL. NAP.
Amburgo <i>pie</i> dè del Reno		0,313854	1,186368
Amsterdam. { <i>pie</i> dè.		0,283	1,070
	{ <i>auna</i>	0,6903	2,5093
	{ <i>pie</i> dè.	0,286	1,081
Anversa	{ <i>auna</i> per la seta.	0,694	2,623
	{ <i>auna</i> per la lana.	0,684	2,586
Austria <i>Klafter</i> o tesa composta di 6 <i>pie</i> di.		1,896614	7,169201
Bade (gran ducato) <i>auna</i> di 2 <i>pie</i> di. . .		0,6000000	2,2680000
Bologna <i>pie</i> dè		0,3801	1,4368
Carrara <i>palmo</i> pei marmi.		0,24927	0,94224
Copenaguen <i>auna</i>		0,6276	2,3723
Costantinopoli <i>pic</i> piccolo per i panni. .		0,648	2,449
Dresda <i>auna</i>		0,5665	2,1414
Ferrara <i>pie</i> dè		0,4039	1,5267
Firenze <i>braccio</i>		0,58366	2,20623
Francoforte <i>auna</i>		0,5473	2,0688
Genova <i>palmo</i>		0,2491	0,9416
Ginevra	{ <i>pie</i> dè.	0,4879	1,8443
	{ <i>auna</i>	1,144	4,324
	{ <i>pie</i> dè.	0,306	1,157
	{ <i>pie</i> dè olimpico antico $\frac{1}{8000}$ del		
Grecia	{ miglio di 60 a grado	0,30859	1,16647
	{ <i>pie</i> dè pizio o delfico antico, $\frac{4}{5}$		
	{ dell' olimpico	0,24687	0,93317
	{ <i>yard</i> composto di 3 <i>pie</i> di	0,9143835	3,4563696
Inghilterra. { <i>fathom</i> o tesa di 6 <i>pie</i> di		1,8287670	6,9127392
	{ <i>pie</i> dè composto di 12 <i>once</i> o		
	{ pollici.	0,3047945	1,1521232
Lisbona <i>vara</i> o <i>auna</i>		1,093	4,132
Losanna tesa composta di 10 <i>pie</i> di. . . .		3,0000000	11,340000
Madrid <i>vara</i> o <i>auna</i> di Castiglia composta di			
3 <i>pie</i> di.		0,848	3,205
Mantova <i>pie</i> dè.		0,4669	1,7649
Milano	{ <i>braccio</i> comune.	0,594936	2,248858
	{ <i>pie</i> dè agrimensorio.	0,435185	1,644999
Modena <i>pie</i> dè		0,5230	1,9769
Monaco <i>auna</i>		0,833	3,149
Napoli <i>palmo</i> $\frac{1}{8000}$ del miglio di 60 a grado.		0,2645503	1,0000000
Padova <i>pie</i> dè		0,3574	1,3510

(1) Le misure meglio determinate sono quella riportate con un maggior numero di cifre.

	METRI.	PAL. NAP.
Parigi { <i>piede</i>	0,3248394	1,2278929
{ <i>auna</i> (antica misura) . . .	1,188446	4,492326
{ <i>metro</i>	1,000000	3,7800000
Presburgo <i>auna</i>	0,5581	2,1096
Prussia ... { <i>piede</i> del Reno	0,313854	1,186368
{ <i>auna</i> nuova	0,6669	2,5209
Berlino... { <i>piede</i> antico	0,310	1,172
{ <i>auna</i> antica	0,6677	2,5239
Reggio di Modena <i>piede</i>	0,5309	2,0068
RENO <i>piede</i> (del) comune a gran parte della Germania	0,313854	1,186368
Roma..... { <i>piede</i>	0,297896	1,126047
{ <i>palm</i> $\frac{3}{4}$ del <i>piede</i>	0,223422	0,844535
{ <i>piede</i> antico $\frac{1}{8000}$ del miglio di 75 a grado	0,29625	1,11982
{ <i>cubito</i> di piedi $1\frac{1}{2}$, corrispon- dente ad $\frac{1}{16000}$ della lega di 25 a grado	0,44437	1,67972
{ <i>piede</i> eguale al <i>piede</i> inglese composto di 12 pollici . . .	0,3047945	1,152123
Russia { <i>archina</i> formata di 28 pollici inglesi	0,7111872	2,688288
{ <i>sagene</i> composta di 84 pollici o di 7 piedi	2,1335615	8,064862
Sardegna... { <i>palm</i>	0,248	0,937
{ <i>raso</i> o <i>auna</i>	0,549	2,075
Sicilia <i>palm</i>	0,258098	0,975610
Svezia { <i>piede</i>	0,297	1,123
{ <i>auna</i>	0,594	2,245
Torino.... { <i>piede</i> detto <i>liprando</i> compo- sto di 12 once, ed eguale ad $\frac{1}{4000}$ del <i>miglio</i> di 45 a grado	0,5137	1,9418
{ <i>raso</i> composto di 14 once del <i>piede</i>	0,5994	2,2657
Varsavia <i>auna</i>	0,5846	2,2098
Venezia <i>piede</i>	0,3474	1,3132
Verona <i>piede</i>	0,3429	1,2962

Misure itinerarie.

		METRI.	NUMERO di misure contenute in un grado
Allemagna.	{ miglio di 15 a grado.	7408	15
	{ lega di 12 a grado	9260	12
Amburgo	miglio di 24000 piedi del Reno , poco diverso dal miglio di 15 a grado. . .	7532	$14\frac{3}{4}$
Austria	miglio di 24000 piedi austriaci. . .	7586	$14\frac{3}{4}$
Bade (Gran ducato)	lega di $12\frac{1}{2}$ a grado. . .	8890	$12\frac{1}{2}$
China	miglio detto li	577	$192\frac{1}{2}$
Copenaguen come Amburgo			
	{ miriametro composto di 10 chilo- metri.	10000	$11\frac{1}{2}$
Francia..	{ lega di 25 a grado	4445	25
	{ lega marina di 20 a grado usata anche in Olanda in Portogallo ed in Polonia.	5556	20
Grecia antica..	{ stadio olimpico di 600 piedi olim- pici equivalente ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado.	185	600
	{ stadio pizio o delfico di 600 piedi delfici equivalente ad $\frac{1}{10}$ del mi- glio di 75 a grado.	148	750
Italia	MIGLIO DI 60 A GRADO usato come miglio marino da molte nazioni, e specialmente dalla Francia dall'Inghilterra e dall'Austria.	1851,9859	60
Inghilterra	miglio di 1760 yards	1609	69
Polonia	miglio di 20 a grado.	5556	20
Portogallo	lega terrestre di 18 a grado . . .	6173	18
Prussia..	{ miglio di 24000 piedi del Reno . miglio di 15 a grado prima del 1816	7532 7408	$14\frac{3}{4}$ 15
Roma	miglio di 1000 passi ciascuno di 5 piedi.	1489	$74\frac{1}{2}$
Roma antica..	{ miglio di 75 a grado, composto di 1000 passi ciascuno di 5 piedi antichi. stadio $\frac{1}{2}$ del miglio, eguale ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado	1481 185	75 600
Russia..	{ wersta di 1500 archine o di 3500 piedi inglesi	1067	$104\frac{1}{2}$
	{ miglio finlandico di 10 werste. .	10668	$10\frac{1}{2}$
Spagna..	{ lega itineraria di 8000 vare. . .	6784	$16\frac{3}{4}$
	{ lega marina di $17\frac{1}{2}$ a grado. . .	6350	$17\frac{1}{2}$
Svezia	miglio di $10\frac{1}{2}$ a grado.	10417	$10\frac{1}{2}$
Torino	miglio piemontese di 4800 piedi. . .	2466	45
Turchia	miglio detto berri.	4670	$66\frac{1}{2}$

Misure superficiali.

	ARE.	NUMERO di misure in un moggio quadrato
Austria <i>yuchart</i> di 1600 <i>klafter</i> quadrati . .	57,5543	595 $\frac{1}{2}$
Grecia antica <i>plethro</i> di 10000 <i>piedi olimpici</i> quadrati	9,523	3601 $\frac{1}{2}$
Inghilterra <i>acre</i> di 4840 <i>yards</i> quadrati. . .	40,4671	847 $\frac{1}{2}$
Madrid. { <i>fanegada</i> dei campi di 500 <i>estadales</i> quadrati	48,84	709 $\frac{1}{2}$
	38,67	886 $\frac{1}{2}$
(<i>l'estadale</i> è una lunghezza di 11 piedi, o di vare 3 $\frac{1}{2}$).		
Milano <i>pertica</i> di 24 <i>tavole</i> ognuna di 144 <i>piedi</i> quadrati.	6,5452	5239 $\frac{1}{2}$
Napoli. { <i>moggio</i> nuovo di 10000 <i>palmi</i> qua- drati.	6,99868	4900
	33,8736	1012 $\frac{1}{2}$
(<i>moggio</i> antico di 48400 <i>palmi</i> qua- drati.)		
Parigi <i>arpent</i> misura antica di 100 <i>pertiche</i> quadrate, essendo la <i>pertica</i> lineare di 18 piedi	34,18869	1003 $\frac{1}{2}$
Prussia <i>morgen</i> di 180 <i>pertiche</i> quadrate (la <i>pertica</i> lineare di 12 <i>piedi</i> del Reno) . .	25,5323	1343 $\frac{1}{2}$
Roma <i>pezza</i> di 16 catene quadrate, la catena lineare essendo composta di palmi 57 $\frac{1}{2}$. .	26,4062	1298 $\frac{1}{2}$
Roma antica <i>jugero</i> di 28800 <i>piedi antichi</i> quadrati	25,2761	1356 $\frac{1}{2}$
Russia <i>deciatine</i> di 2400 <i>sagene</i> quadrate. .	109,25000	313 $\frac{1}{2}$
Sicilia <i>salma</i> di 4096 canne quadrate. . . .	174,6259	196 $\frac{1}{2}$

Misure di capacità.

		LITRI.	TOMOLI NAP.
Grecia antica <i>anfora attica</i> equivalente a $\frac{1}{8}$ del cubo di $\frac{3}{4}$ di un <i>pie</i> de olimpico.		39,000	0,70213
Inghilterra <i>gallone</i> imperiale.		4,543458	0,081798
Napoli.	<i>tomolo</i> per gli aridi eguale a 3 <i>pal.</i>		
	cubi nap.	35,545113	1,000000
	<i>barile</i> pel vino eguale a 3 <i>palmi</i> cilindrici (*)	43,625030	0,785398
	<i>setier</i> misura antica composta di 12 <i>boisseaux</i>	156,000	2,8085
Parigi.	la TONELLATA di mare, considerata a volume, eguaglia 42 piedi francesi cubici, ossia metri cubi 1,44.		
	Roma antica <i>anfora</i> eguale al cubo del <i>pie</i> - <i>de</i> romano antico.	26,000	0,46809
Sicilia.	<i>tomolo</i> per gli aridi eguale ad un <i>palm</i> o cubo sic.	17,193053	0,309533
	<i>barile</i> pel vino eguale a 2 <i>palmi</i> cubi sic.	34,386106	0,619066

(*) Il *palm*o cilindrico è un cilindro retto avente un *palm*o di altezza ed un *palm*o di diametro. La definizione del *barile* in misure cubiche non presentando un rapporto semplice col *palm*o, si è preferito giustamente di definirlo in misure cilindriche, riflettendo ancora che il cilindro forse più del cubo è a cognizione di tutti, e può costruirsi con eguale o maggior facilità. In Francia le stesse misure metriche si costruiscono di forma cilindrica, e le unità cilindriche sono menzionate e adoperate nelle opere di diversi autori.

Pesi.

	CHILOGR.	ROT. NAP.
Amburgo <i>libbra</i>	0,4843	0,5435
Amsterdam <i>libbra</i> di 16 once.....	0,494	0,554
Anversa <i>libbra</i>	0,47016	0,52768
Austria <i>libbra</i>	0,5600	0,6285
Bade (Gran ducato) <i>libbra</i>	0,500000	0,561169
Copenaguen <i>libbra</i>	0,4994	0,5605
Costantinopoli <i>oka</i> , o <i>rotolo</i> grosso.....	1,27	1,43
Dresda <i>libbra</i>	0,467	0,524
Firenze <i>libbra</i>	0,339542	0,381081
Genova <i>libbra</i>	0,317	0,356
Grecia antica <i>mina attica</i> , o <i>libbra</i> eguale ad $\frac{1}{180}$ del peso di un volume di acqua pio- vana corrispondente all' <i>anfora attica</i> ...	0,3258	0,3657
Inghilterra {	<i>libbra troy</i> composta di 12 once ognuna di 480 grani	0,373096
	<i>libbra avoirdupois</i> eguale a 7000 grani troy	0,453415
	la TONELLATA di mare è composta di 20 quintali ognuno di 112 lib. <i>avoirdupois</i> ed equivale a chil. 1015 $\frac{1}{2}$, ossia nocant. nap. 111,40.	0,508885
	<i>libbra</i>	0,4588
Lisbona.. {	<i>arrobbia</i> peso di 32 <i>libbre</i>	0,5149
Losanna <i>libbra</i> di 16 once.....	0,500000	0,561169
Madrid <i>libbra</i>	0,460	0,516
Milano... {	<i>libbra</i> grossa di 28 once	0,762517
	<i>libbra</i> piccola di 12 once.....	0,326793
Napoli <i>rotolo</i> eguale ad $\frac{1}{180}$ del peso di un volu- me di acqua distillata corrispondente al cubo di $\frac{1}{2}$ di palmo alla temperatura di 16 $^{\circ}\frac{1}{2}$ centigra- di, e sotto la pressione barometrica di 28 pol.	0,890997	1,000000
Parigi <i>libbra</i> antica detta <i>di marco</i>	0,489506	0,549391
Prussia <i>libbra</i> eguale ad $\frac{1}{180}$ del peso di un piede cubo del Reno di acqua distillata alla temperatura di 15 gradi di Reaumur....	0,467711	0,524930
Roma . . {	<i>libbra</i> attuale	0,339
	<i>libbra</i> antica eguale ad $\frac{1}{180}$ del peso di un <i>anfora</i> , o sia di un piede cubo antico di acqua piovana..	0,3258
	<i>libbra</i> della zecca.....	0,3657
Russia <i>libbra</i> della zecca.....	0,409367	0,459448
Sicilia <i>rotolo</i>	0,79342	0,89049
Svezia <i>libbra</i> detta <i>victualia</i>	0,425	0,477
Torino... {	<i>libbra</i>	0,368845
	<i>Rubbo</i> peso di 25 <i>libbre</i>	0,413969
Varsavia <i>libbra</i>	0,405	0,455

Rapporti sempliari approssimati di alcune misure.

40 piedi francesi	13 metri.....	ERRORE. 1 sopra 2000
157 idem	51 idem * (a).	
16 pal. nap. equivalgono a	13 piedi fran.....	1 410
97 idem.....	79 idem.....	1 28000
361 idem.....	294 idem *	
9 pal. nap.....	2 aune di Parigi.....	1 580
292 idem.....	65 idem *	
38 pal. nap.....	11 Yards ingl.....	1 1900
515 idem.....	149 idem *	
31 pal. sic.....	8 metri.....	1 7800
957 idem.....	247 idem *	
9 tomoli nap.....	5 ettolitri.....	1 5300
1064 idem.....	591 idem *	
13 tomoli nap.....	42 tom. sic. *	
51 barili nap.....	24 ettolitri.....	1 3700
19 idem.....	65 idem *	
5 barili nap.....	48 galloni ingl.....	1 2200
113 idem.....	1085 idem *	
26 barili nap.....	33 barili sic.....	1 2300
562 idem.....	713 idem *	
2 moggio nuovo nap.....	7 are francesi.....	1 5300
760 idem.....	5139 idem *	
25 moggi nuovi nap.....	1 salma sic.....	1 510
1023 idem.....	41 idem *	
46 rotoli nap.....	41 chilogrammi.....	1 2900
211 idem.....	188 idem *	
64 rotoli sic.....	57 rot. nap.....	1 6400
210 idem.....	187 idem *	

Rapporti esatti teoretici di alcune misure.

50 metri equivalgono a.....	189 palmi nap.
8 metri.....	27 piedi romani antichi.
25 metri.....	81 piedi greci olimpici.
7 palma nap.....	6 piedi olimpici.
28 palmi nap.....	25 piedi romani antichi.
49 moggi nuovi nap.....	36 plettri greci antichi.

(a) L'errore de' rapporti segnati con l'asterisco* è sempre minore di 1 sopra 30000, onde essi possono considerarsi esatti nella maggior parte dei casi.

Nota sulle misure antiche. La lunghezza del piede olimpico ricavata dal Partenone o tempio di Minerva in Atene deve considerarsi esatta nel limite di qualche decimo di millimetro, ed essendo altronde verità riconosciuta in Archeologia che l'antico piede romano fosse $\frac{2}{3}$ del piede greco olimpico; con eguale approssimazione risulta determinato il piede romano. Ma le notabili differenze fra alcuni moduli di quest'ultima misura in varie epoche rinvenuti rendevano incerto il giudizio de' dotti, e solo rimosse ogni dubbio l'esame de' monumenti di Ercolano e Pompei, istituito con dotta cura dal chiarissimo nostro concittadino sig. cav. Cagnazzi. Questi in una sua interessante memoria *Su i valori delle misure e de' pesi degli antichi romani dedotti dagli originali esistenti nel museo di Napoli*, dopo aver ricordate le varie opinioni degli archeologi intorno alla lunghezza dell'antico piede romano, la determina per mezzo delle misure esistenti nel Real Museo Borbonico in due diversi modi cioè, ricavandola immediatamente da un mezzo piede di avorio di buona costruzione e ben conservato, e derivandola coll'esperienza e col calcolo da un campione del peso di 10 libbre romane rimasto intatto, sul principio conosciuto che 10 libbre romane equivalevano al peso di un volume di acqua pura corrispondente al congio ossia al cubo di mezzo piede: dalla misura diretta risulta il piede romano di $0^{\text{m}}, 29622$ e dell'altra di $0^{\text{m}}, 29624$, e questi due valori, che possono considerarsi eguali, si accordano anche benissimo col piede greco nel rapporto incontestabile di 24: 25 accennato di sopra.

In una relazione fatta all'Istituto di Francia intorno ad un modulo del piede romano recentemente trovato nella foresta di Maukervier, si fa dipendere l'esatta definizione di quell'antica misura principalmente dal lavoro del cav. Cagnazzi, soggiungendosi con lodevole (e rara) sincerità, aver egli risoluto il problema; ma il chiarissimo sig. Jomard relatore fa concorrere alla più probabile determinazione del piede romano anche le lunghezze di altri tre moduli ed ottiene per un medio $0^{\text{m}}, 29614$. Per verità, considerando che gli antichi romani erano privi de' mezzi ottici d'ingrandimento conosciuti dai moderni, e non possedevano neanche i mezzi meccanici nella perfezione in cui sono attualmente, sembra difficile che potessero ne' lavori più accurati rispondere delle minime frazioni; per la qual cosa, prendendo per termine di paragone, e come per guida sicura, la determinazione del cav. Cagnazzi, pare che si dovessero insieme con essa coacervare tutte le misure ricavate da altri monumenti antichi che, allontanandosene pochissimo in più o in meno, dovrebbero avere eguale diritto alla fiducia de' dotti. Laonde, valendoci degli stessi dati raccolti dai signori Cagnazzi e Jomard abbiamo preso il medio aritmetico delle cinque seguenti misure poco differenti fra loro e ricavate da moduli ben conservati;

Lunghezza del piede dedotta dalle misure ponderali del

Museo di Napoli	$0^{\text{m}}, 29624$
Idem da un modulo di avorio dello stesso Museo..	$0^{\text{m}}, 29622$
Idem da un modulo di bronzo dello stesso.....	$0^{\text{m}}, 29630$
Idem da un altro modulo del Museo di Parigi..	$0^{\text{m}}, 29630$
Idem da un altro del Museo del Collegio romano..	$0^{\text{m}}, 29614$

Così questa operazione si ricade nel valore di $0^{\text{m}}, 29624$ assegnato dal cav. Cagnazzi.

Da un'altra parte riferisce il sig. Jomard che i signori *Le Roy*, *Focherot* e *Stuart*, avendo ricavata, separatamente ed in epoche diverse, la lunghezza del piede greco dalla misura del Partenone, ne risultò il piede romano di $0^{\text{m}}, 29673$; $0^{\text{m}}, 29625$; $0^{\text{m}}, 29584$, e per un medio $0^{\text{m}}, 29627$: quindi, incaricandosi anche di questo dato, il piede romano potrebbe por-

tarsi a $0^{\text{mm}},29625$, ossia a millimetri $296\frac{1}{4}$. È notabile che questo stesso valore è dato pure dal diligentissimo sig. *Guerin de Thionville* nelle sue tavole pubblicate prima della relazione del sig. *Jomard*, ma dopo l'opera del cav. *Cagnazzi*.

Qualunque delle tre misure si adotti, o la $0^{\text{mm}},29624$ determinata dal *Cagnazzi*, o la $0^{\text{mm}},29614$ voluta dal *Jomard*, o la precedente $0^{\text{mm}},29625$, il piede romano potrà sempre teoricamente definirsi *la 5000 esima parte del miglio di 75 a grado*; perocchè un tal miglio essendo eguale a $1481^{\text{m}},48$, la sua 5000 esima parte è $0^{\text{m}},296296$, e la differenza di $\frac{1}{500}$, di $\frac{1}{100}$, o di $\frac{1}{50}$ di millimetro tra questa misura e le precedenti, oltre di essere per se stessa molto piccola, deve considerarsi proveniente dalla imperfetta conoscenza che gli antichi avevano del grado terrestre. Anzi se si adotterà come più probabile, la lunghezza $0^{\text{mm}},29625$, la differenza $0,000046$ col valore ricavato dal grado non eccederà i limiti dell'incertezza che tuttora esiste nelle misure terrestri. Essendo dunque il piede romano la 5000 esima parte del miglio di 75 a grado, in virtù del rapporto conosciuto di $24:25$, il piede greco sarà $\frac{24}{25}$ dello stesso miglio, ovvero $\frac{24}{25} \times \frac{1}{5000} = \frac{1}{5208}$ del miglio di 60 a grado. Questa doppia coincidenza non potendo esser casuale, conferma i valori attribuiti al piede romano ed al greco, e dimostra che dai tempi più antichi le nazioni incivilite derivarono le loro misure dal grado terrestre. Mirabile è poi la derivazione del piede greco, perchè stabilisce un rapporto immediato e semplice tra quella misura ed il minuto secondo di meridiano; in fatti il minuto primo, equivalente ad un miglio, contiene 60 secondi, o 6000 piedi, e però 100 piedi olimpici equivalgono ad un secondo di arco del meridiano terrestre.

La precedente opinione, che le misure greche e romane fossero ricavate dal grado terrestre, non ha bisogno di prove, ed emerge spontanea dalla lunghezza assegnata dagli Archeologi al piede greco ed al romano, dietro l'esame degli antichi monumenti. Nulladimeno le ricerche del dotto signor *Gossekin* sulla Geografia antica lo avevano già condotto allo stesso risultato, ed ultimamente il chiarissimo sig. *Walckenaer*, in una memoria letta all'Istituto di Francia, ha dimostrato che il miglio romano di 75 a grado, composto di 5000 piedi, è giustificato dalle distanze riportate nell'Itinerario di Antonino, e nella Tavola teodosiana per tutte le strade che circondano la città di Roma.

Stabilito il valore dell'unità lineare, risultano determinate tutte le altre misure, di superficie, di capacità, e di peso, giacchè gli antichi, quantunque avessero un commercio molto più limitato de' moderni, conobbero nondimeno la necessità di un ben ordinato sistema metrico (§. 78), e mettevano grande importanza in questa parte di servizio pubblico, sino ad affidarla alla protezione degli dei (*). I rapporti fra l'unità lineare e le misure subordinate, presso gli antichi, ci sono pervenuti con le loro opere, nè intorno ad essi v'ha disparità di opinioni fra i dotti. Nella tavola precedente noi abbiamo riportate le principali misure greche e romane con la loro derivazione dall'unità lineare.

(*) *Quam (anphoram) ne violare liceret, Sacrovere Iovi, Tarpejo in monte, quirites.*

F. Palemono.

TAVOLA DE' VALORI DI DIVERSE MONETE
AL PARI (*)

	FRANCHI.	DUC. NAP.
Amsterdam <i>florino</i> di nuovo conto.	2,14	0,504
Austria.. { <i>lira</i> austriaca	0,865	0,204
{ <i>florino</i> di 3 lire.	2,595	0,611
{ <i>risdallero</i> di 2 fiorini.	5,19	1,221
Bade (Gran ducato) <i>florino</i>	2,12	0,491
Baviera <i>florino d'impero</i> , moneta di conto.	2,16	0,508
Belgio.. { <i>florino corrente</i> antica moneta		
{ di conto.	1,82	0,428
{ <i>franco</i> nuova moneta.	1,00	0,235
Copenaguen <i>risdallero</i>	5,66	1,332
Costanti- <i>pezza</i> di 5 <i>piastre</i> del 1811	4,14	0,974
nopoli... { una <i>borsa</i> vale 500 <i>piastre</i>		
Firenze <i>lira</i>	0,84	0,198
Franco- <i>risdallero</i> o <i>tallero</i> di 90 kreutzers.	3,90	0,918
forte . . . <i>florino</i> di 60 kreutzers.	2,60	0,612
Genova <i>lira</i>	0,835	0,196
{ <i>dramma</i> unità monetaria.	0,93	0,219
Grecia { <i>mina</i> di 100 <i>dramme</i>	92,68	21,81
antica.. { <i>talento</i> d'argento di 60 mine..	5561	1308
{ <i>talento</i> d'oro di 600 mine	55609	13084
Inghilterra <i>lira sterlina</i> di 20 <i>scellini</i>	25,208	5,931
Milano.. { <i>lira austriaca</i>	0,865	0,204
{ <i>lira antica</i>	0,76	0,179
Napoli <i>ducato</i> di 100 <i>grana</i>	4,25	1,000
Piemonte { <i>lira nuova</i>	1,00	0,235
{ <i>lira antica</i>	1,18	0,278
Polonia <i>risdallero</i>	5,19	1,221
Portogallo <i>cruzada</i> nuova di 480 <i>reali</i>	2,94	0,692
Prussia <i>scudo</i> , <i>risdallero</i> o <i>tallero</i>	3,71	0,873
Roma <i>scudo</i>	5,36	1,261
{ <i>sesterzio</i> o <i>nummus</i> unità monetaria	0,20	0,047
Roma { <i>denaro</i> di 4 <i>sesterzi</i>	0,81	0,191
antica.. { <i>aureo</i> di 25 <i>denari</i> , o 100 <i>sesterzi</i> .	20,38	4,795
{ <i>talento grande</i> di 32000 <i>sesterzi</i> .	6522	1535
{ <i>talento piccolo</i> di 24000 <i>sesterzi</i> .	4491	1057
Russia <i>rublo</i>	4,00	0,941
Sardegna come il Piemonte.		
{ <i>reale di plata</i>	0,543	0,128
Spagna.. { <i>reale di veglione</i> , metà del pre-		
{ cedente.	0,271	0,064
Venezia <i>zecchino</i>	11,95	2,812

(*) Il rapporto delle monete *al pari* non è che il rapporto delle quantità di metallo fino d'oro e d'argento che contengono, esclusa la lega.

(1)

RIDUZIONE

di palmi napolitani in palmi siciliani, in palmi romani, in metri, in piedi di Parigi, in aune di Parigi, in yards inglesi, ed in klafter o tese di Vienna.

Pal. nap.	Palmi sicil.	Palmi romani.	Metri.	Piedi parigini.	Aune di Parigi.	Yards.	Klafter.
1	1,025	1,18408	0,264550	0,81440	0,222602	0,289321	0,139486
2	2,050	2,36817	0,529101	1,62881	0,445204	0,578642	0,278971
3	3,075	3,55225	0,793651	2,44321	0,667806	0,867963	0,418457
4	4,1	4,73633	1,058201	3,25761	0,890407	1,157284	0,557942
5	5,125	5,92042	1,322751	4,07202	1,113009	1,446605	0,697428
6	6,160	7,10450	1,587302	4,88642	1,335611	1,735925	0,836913
7	7,175	8,28858	1,851852	5,70082	1,558213	2,025246	0,976399
8	8,2	9,47267	2,116402	6,51523	1,780815	2,314567	1,115884
9	9,225	10,65675	2,380952	7,32963	2,003417	2,603888	1,255370
10	10,25	11,84083	2,645503	8,14403	2,226018	2,893209	1,394856
20	20,5	23,68167	5,291005	16,28806	4,452037	5,786418	2,789111
30	30,75	35,52250	7,936508	24,43210	6,678055	8,679627	4,184567
40	41	47,36353	10,582011	32,57613	8,904074	11,572836	5,579422
50	51,25	59,20416	13,227513	40,72016	11,130092	14,466045	6,974278
60	61,5	71,04500	15,873016	48,86419	13,356110	17,359255	8,369134
70	71,75	82,88583	18,518519	57,00822	15,582129	20,252464	9,763989
80	82	94,72666	21,164021	65,15225	17,808147	23,145673	11,158845
90	92,25	106,56750	23,809524	73,29629	20,034166	26,038882	12,553700
100	102,5	118,40833	26,455026	81,44032	22,260184	28,932091	13,948556

RIDUZIONE

di palmi siciliani, metri, piedi di Parigi, aune di Parigi e yards inglesi in palmi napolitani.

Pal. sicil.	Palmi napol.	Met.	Pal. nap.	Pie.	Palmi napolit.	Au.	Palmi napolit.	Yar.	Palmi napolit.
1	0,9756	1	3,78	1	1,2279	1	4,4923	1	5,4564
2	1,9512	2	7,56	2	2,4558	2	8,9847	2	6,9127
3	2,9268	3	11,34	3	3,6837	3	13,4770	3	10,3691
4	3,9024	4	15,12	4	4,9116	4	17,9693	4	13,8255
5	4,8780	5	18,90	5	6,1395	5	22,4616	5	17,2818
6	5,8537	6	22,68	6	7,3674	6	26,9540	6	20,7382
7	6,8293	7	26,46	7	8,5953	7	31,4463	7	24,1946
8	7,8049	8	30,24	8	9,8231	8	35,9386	8	27,6510
9	8,7805	9	34,02	9	11,0510	9	40,4309	9	31,1073
10	9,7561	10	37,80	10	12,2789	10	44,9233	10	34,5637
20	19,5122	20	75,6	20	24,5579	20	89,8465	20	69,1274
30	29,2683	30	113,4	30	36,8368	30	134,7698	30	103,6911
40	39,0244	40	151,2	40	49,1157	40	179,6930	40	138,2548
50	48,7805	50	189	50	61,3947	50	224,6163	50	172,8185
60	58,5366	60	226,8	60	73,6736	60	269,5395	60	207,3822
70	68,2927	70	264,6	70	85,9525	70	314,4628	70	241,9459
80	78,0488	80	302,4	80	98,2314	80	359,3860	80	276,5096
90	87,8049	90	340,2	90	110,5104	90	404,3093	90	311,0733
100	97,5610	100	378	100	122,7893	100	449,2325	100	345,6370

RIDUZIONE

di passi geodetici, o millesimi di miglio, in palmi romani, in metri, in tese, in yards, in klafter di Vienna ed in piedi del Reno.

Pas.	Pul.rom.	Metri.	Tese.	Yards.	Klafter.	Pi.del Ren
1	8,28918	1,851986	0,950206	2,025393	0,976470	5,90079
2	16,57837	3,703972	1,900412	4,050786	1,952939	11,80158
3	24,86755	5,555958	2,850617	6,076179	2,929409	17,70236
4	33,15673	7,407944	3,800823	8,101572	3,905878	23,60315
5	41,44592	9,259930	4,751029	10,126965	4,882348	29,50394
6	49,73510	11,111916	5,701235	12,152358	5,858818	35,40473
7	58,02428	12,963901	6,651441	14,177751	6,835287	41,30552
8	66,31347	14,815887	7,601647	16,203144	7,811757	47,20630
9	74,60265	16,667873	8,551852	18,228537	8,788226	53,10700
10	82,89183	18,519859	9,502058	20,253930	9,764696	59,00788
20	165,78367	37,039719	19,004117	40,507861	19,529392	118,01576
30	248,67550	55,559578	28,506175	60,761791	29,294088	177,02364
40	331,56733	74,079437	38,008233	81,015721	39,058784	236,03152
50	414,45917	92,599296	47,510291	101,269651	48,823480	295,03940
60	497,35100	111,119156	57,012350	121,523582	58,588176	354,04728
70	580,24284	129,639015	66,514408	141,777512	68,352872	413,05516
80	663,13467	148,158874	76,016466	162,031442	78,117568	472,06304
90	746,02650	166,678733	85,518524	182,285373	87,882265	531,07092
100	828,91834	185,198593	95,020583	202,539303	97,646961	590,07880

RIDUZIONE

di metri, tese, yards e klafter in passi geodetici.

Met.	Passi.	Tes.	Passi.	Yar.	Passi.	Kla.	Passi.
1	0,539961	1	1,052404	1	0,493731	1	1,024097
2	1,079922	2	2,104807	2	0,987463	2	2,048195
3	1,619883	3	3,157211	3	1,481194	3	3,072292
4	2,159844	4	4,209614	4	1,974925	4	4,096390
5	2,699805	5	5,262018	5	2,468657	5	5,120487
6	3,239765	6	6,314421	6	2,962388	6	6,144584
7	3,779726	7	7,366825	7	3,456119	7	7,168682
8	4,319687	8	8,419229	8	3,949851	8	8,192779
9	4,859648	9	9,471632	9	4,443582	9	9,216877
10	5,399609	10	10,524036	10	4,937313	10	10,240974
20	10,799218	20	21,048071	20	9,874627	20	20,481948
30	16,198827	30	31,572107	30	14,811940	30	30,722922
40	21,598436	40	42,096143	40	19,749253	40	40,963397
50	26,998045	50	52,620178	50	24,686567	50	51,204871
60	32,397654	60	63,144214	60	29,623880	60	61,445845
70	37,797263	70	73,668250	70	34,561193	70	71,686819
80	43,196873	80	84,192285	80	39,498507	80	81,927793
90	48,596482	90	94,716321	90	44,435820	90	92,168767
100	53,996091	100	105,240357	100	49,373133	100	102,409742

RIDUZIONE di palmi nap. quadrati e cubici in metri quadrati e cubici.				RIDUZIONE di metri quadrati e cubici in palmi nap. quadrati e cubici.			
Pal. qua.	Metri quadrati	Pal. cub.	Metri cubici	Met. qua.	Palmi quadrati.	Met. cub.	Palmi cubici
1	0,06999	1	0,018515	1	14,2884	1	54,0102
2	0,13997	2	0,037030	2	28,5768	2	108,0203
3	0,20996	3	0,055545	3	42,8652	3	162,0305
4	0,27995	4	0,074060	4	57,1536	4	216,0406
5	0,34993	5	0,092575	5	71,4420	5	270,0508
6	0,41992	6	0,111090	6	85,7304	6	324,0609
7	0,48991	7	0,129605	7	100,0188	7	378,0711
8	0,55989	8	0,148120	8	114,3072	8	432,0812
9	0,62988	9	0,166635	9	128,5956	9	486,0914
10	0,69987	10	0,185150	10	142,8840	10	540,1015
20	1,39974	20	0,370301	20	285,7680	20	1080,2030
30	2,09961	30	0,555451	30	428,6520	30	1620,3046
40	2,79947	40	0,740601	40	571,5360	40	2160,4061
50	3,49934	50	0,925752	50	714,4200	50	2700,5076
60	4,19921	60	1,110902	60	857,3040	60	3240,6091
70	4,89908	70	1,296053	70	1000,1880	70	3780,7106
80	5,59895	80	1,481203	80	1143,0720	80	4320,8122
90	6,29882	90	1,666353	90	1285,9560	90	4860,9137
100	6,99868	100	1,851504	100	1428,8400	100	5401,0152

RIDUZIONE di palmi quadrati e cubici in piedi parigini quadrati e cubici.				RIDUZIONE di piedi quadrati e cubici in palmi quadrati e cubici.			
Pal. qua.	Piedi quadrati	Pal. cub.	Piedi cubici	Pie. qua.	Palmi quadrati	Pie. cub.	Palmi cubici
1	0,66325	1	0,54015	1	1,50772	1	1,85132
2	1,32651	2	1,08031	2	3,01544	2	3,70264
3	1,98976	3	1,62046	3	4,52316	3	5,55396
4	2,65301	4	2,16062	4	6,03089	4	7,40528
5	3,31626	5	2,70077	5	7,53861	5	9,25660
6	3,97952	6	3,24093	6	9,04633	6	11,10792
7	4,64277	7	3,78108	7	10,55405	7	12,95924
8	5,30602	8	4,32124	8	12,06177	8	14,81056
9	5,96927	9	4,86139	9	13,56949	9	16,66188
10	6,63253	10	5,40155	10	15,07721	10	18,51321
20	13,26505	20	10,80310	20	30,15443	20	37,02641
30	19,89758	30	16,20465	30	45,23164	30	55,53962
40	26,53010	40	21,60620	40	60,30885	40	74,05282
50	33,16263	50	27,00775	50	75,38607	50	92,56603
60	39,79515	60	32,40930	60	90,46328	60	111,07923
70	46,42768	70	37,81085	70	105,54049	70	129,59244
80	53,06020	80	43,21240	80	120,61771	80	148,10564
90	59,69273	90	48,61395	90	135,69492	90	166,61885
100	66,32525	100	54,01550	100	150,77213	100	185,13205

Rapporti approssimati.

7 met. quad = 100 pal. quad., 1 met. cub = 54 pal. cub.
 65 piedi quad = 98 pal. quad., 100 pal. cub = 54 piedi cub.

RIDUZIONE

*di miglia in miriametri ed in leghe; di miriametri in miglia;
di leghe in miglia, e di miriametri in leghe.*

Mig.	Miriam.	Mig.	Leghe	Mir.	Miglia	Le.	Mig.	Mir.	Leghe
1	0,185199	1	0,4166...	1	0,539961	1	2,4	1	2,249837
2	0,370397	2	0,8333...	2	1,079922	2	4,8	2	4,499674
3	0,555596	3	1,25	3	1,619883	3	7,2	3	6,749511
4	0,740794	4	1,6666...	4	2,159844	4	9,6	4	8,999348
5	0,925993	5	2,0833...	5	2,699805	5	12,0	5	11,249186
6	1,111192	6	2,5	6	3,239765	6	14,4	6	13,499023
7	1,296390	7	2,9166...	7	3,779726	7	16,8	7	15,748860
8	1,481589	8	3,3333...	8	4,319687	8	19,2	8	17,998697
9	1,666787	9	3,75	9	4,859648	9	21,6	9	20,248534
10	1,851986	10	4,1666...	10	5,399609	10	24	10	22,498371

Rapporti approssimati; 5 miriam equivalgono a 27 miglia,
4 miriam..... a 9 leghe.

RIDUZIONE

*di miglia quadrate in chilometri quadrati ed in leghe quadrate;
di chil. quad. in miglia quad.; di leghe quad. in miglia quad.,
e di chil. quad. in leghe quad.*

M. q.	Chil. qu.	Legh. qu.	C. q.	Mig. qu.	L. q.	Mig. q.	Ch. q.	Legh. qu.
1	3,42985	0,17361...	1	0,291558	1	5,76	10	0,506177
2	6,85970	0,34722...	2	0,583116	2	11,52	20	1,012353
3	10,28956	0,52083...	3	0,874673	3	17,28	30	1,518530
4	13,71941	0,69444...	4	1,166231	4	23,04	40	2,024707
5	17,14926	0,86805...	5	1,457789	5	28,8	50	2,530884
6	20,57911	1,04166...	6	1,749347	6	34,56	60	3,037060
7	24,00896	1,21527...	7	2,040904	7	40,32	70	3,543237
8	27,43881	1,38888...	8	2,332462	8	46,08	80	4,049414
9	30,86867	1,5625	9	2,624020	9	51,84	90	4,555590
10	34,29852	1,73611...	10	2,915578	10	57,60	100	5,061767
20	68,59704	3,47222...	20	5,831156	20	115,2	200	10,123534
30	102,89556	5,20833...	30	8,746733	30	172,8	300	15,185301
40	137,19407	6,94444...	40	11,662311	40	230,4	400	20,247068
50	171,49259	8,68055...	50	14,577889	50	288	500	25,308835
60	205,79111	10,41666...	60	17,493467	60	345,6	600	30,370602
70	240,08963	12,15277...	70	20,409045	70	403,2	700	35,432369
80	274,38815	13,88888...	80	23,324622	80	460,8	800	40,494136
90	308,68667	15,625	90	26,240200	90	518,4	900	45,555590
100	342,98519	17,36111...	100	29,155778	100	576	1000	50,617670

Rapporti approssimati; 2500 chil. quad. equivalgono a 729 mig. quad.
1600 chil. quad..... ad 81 leg. quad.

RIDUZIONE

di tomoli napoletani in tomoli siciliani, o quartari, ed in ettolitri; di tom. sic. in tom. nap. ed in ettolitri; e di ettolitri in tom. nap. ed in tom. sic.

T.n.	Tom. sic.	Ettolit.	T. s.	T. nap.	Ettolit.	Ett.	Tom. na.	Tom. sic.
1	3,2307	0,5555	1	0,3095	0,1719	1	1,8003	5,8163
2	6,4613	1,1109	2	0,6191	0,3439	2	3,6007	11,6326
3	9,6920	1,6664	3	0,9286	0,5158	3	5,4010	17,4489
4	12,9227	2,2218	4	1,2381	0,6877	4	7,2014	23,2652
5	16,1534	2,7773	5	1,5477	0,8597	5	9,0017	29,0815
6	19,3840	3,3327	6	1,8572	1,0316	6	10,8020	34,8978
7	22,6147	3,8882	7	2,1667	1,2035	7	12,6024	40,7141
8	25,8454	4,4436	8	2,4763	1,3754	8	14,4027	46,5304
9	29,0760	4,9991	9	2,7858	1,5474	9	16,2030	52,3467
10	32,3067	5,5545	10	3,0953	1,7193	10	18,0034	58,1630
20	64,6134	11,1090	20	6,1907	3,4386	20	36,0068	116,3261
30	96,9202	16,6635	30	9,2860	5,1579	30	54,0102	174,4891
40	129,2269	22,2180	40	12,3813	6,8772	40	72,0135	232,6521
50	161,5336	27,7726	50	15,4767	8,5965	50	90,0169	290,8151
60	193,8403	33,3271	60	18,5720	10,3158	60	108,0203	348,9782
70	226,1470	38,8816	70	21,6673	12,0351	70	126,0237	407,1412
80	258,4538	44,4361	80	24,7627	13,7544	80	144,0271	465,3042
90	290,7605	49,9906	90	27,8580	15,4737	90	162,0305	523,4672
100	323,0672	55,5451	100	30,9533	17,1931	100	180,0338	581,6303

RIDUZIONE

di barili napoletani in barili siciliani, ciascuno di 2 quartari, in ettolitri ed in galloni inglesi; di ettolitri in bar. nap; e di galloni in bar. nap. ed in bar. sic.

B.n.	Bar. sic.	Ettolit.	Galloni	Ett.	Bar. nap.	Gal.	Bar. na.	Bar. si.
1	1,2687	0,4363	9,602	1	2,2923	1	0,1041	0,1321
2	2,5374	0,8725	19,203	2	4,5845	2	0,2083	0,2643
3	3,8060	1,3088	28,805	3	6,8768	3	0,3124	0,3964
4	5,0747	1,7450	38,407	4	9,1690	4	0,4166	0,5285
5	6,3434	2,1813	48,009	5	11,4613	5	0,5207	0,6607
6	7,6121	2,6175	57,610	6	13,7536	6	0,6249	0,7928
7	8,8808	3,0538	67,212	7	16,0458	7	0,7290	0,9249
8	10,1495	3,4900	76,814	8	18,3381	8	0,8332	1,0570
9	11,4181	3,9263	86,416	9	20,6304	9	0,9373	1,1892
10	12,6868	4,3625	96,017	10	22,9226	10	1,0415	1,3213
20	25,3736	8,7250	192,034	20	45,8452	20	2,0830	2,6426
30	38,0605	13,0875	288,052	30	68,7679	30	3,1244	3,9639
40	50,7473	17,4500	384,069	40	91,6903	40	4,1659	5,2852
50	63,4341	21,8125	480,086	50	114,6131	50	5,2074	6,6065
60	76,1209	26,1750	576,103	60	137,5357	60	6,2489	7,9278
70	88,8077	30,5375	672,121	70	160,4583	70	7,2904	9,2491
80	101,4946	34,9000	768,138	80	183,3810	80	8,3318	10,5705
90	114,1814	39,2625	864,155	90	206,3036	90	9,3733	11,8918
100	126,8682	43,6250	960,172	100	229,2262	100	10,4148	13,2131

RIDUZIONE

di rotoli napolitani in rotoli siciliani, in chilogrammi ed in libbre troy
inglesi; di chilogrammi in rot. nap. ed in rot. sic.; e di rot. sic.
in rot. nap.

R. n.	Rot. sic.	Chilog.	Lib. troy	Chil.	Rot. nap.	Rot. sic.	R. s.	Rot. na.
1	1,1230	0,8910	2,3881	1	1,1223	1,2604	1	0,8905
2	2,2460	1,7820	4,7762	2	2,2447	2,5207	2	1,7810
3	3,3689	2,6730	7,1644	3	3,3670	3,7811	3	2,6715
4	4,4919	3,5640	9,5525	4	4,4894	5,0415	4	3,5619
5	5,6149	4,4550	11,9406	5	5,6117	6,3018	5	4,4524
6	6,7379	5,3460	14,3287	6	6,7340	7,5622	6	5,3429
7	7,8609	6,2370	16,7168	7	7,8564	8,8226	7	6,2334
8	8,9839	7,1280	19,1049	8	8,9787	10,0829	8	7,1239
9	10,1068	8,0190	21,4931	9	10,1010	11,3433	9	8,0144
10	11,2298	8,9100	23,8812	10	11,2234	12,6037	10	8,9049
20	22,4597	17,8199	47,7624	20	22,4468	25,2073	20	17,8097
30	33,6895	26,7299	71,6435	30	33,6701	37,8110	30	26,7146
40	44,9193	35,6399	95,5247	40	44,8935	50,4147	40	35,6194
50	56,1492	44,5499	119,4059	50	56,1169	63,0183	50	44,5243
60	67,3790	53,4598	143,2871	60	67,3403	75,6220	60	53,4291
70	78,6088	62,3698	167,1682	70	78,5637	88,2257	70	62,3340
80	89,8386	71,2798	191,0494	80	89,7870	100,8293	80	71,2388
90	101,0685	80,1897	214,9306	90	101,0104	113,4330	90	80,1437
100	112,2983	89,0997	238,8118	100	112,2338	126,0366	100	89,0485

RIDUZIONE

di cantaja napolitane e cantaja siciliane in quintali inglesi; di tonellate
inglesi in cant. nap. e in cant. sic.; e di tonellate metriche in cant.
nap. ed in cant. sic.

C. n.	Qui. in.	C. s.	Qui. in.	T. in	Cant. n.	Cant. s.	T. m.	Cant. n.	Cant. s.
1	1,755	1	1,562	1	11,40	12,80	1	11,22	12,60
2	3,509	2	3,125	2	22,80	25,60	2	22,45	25,21
3	5,264	3	4,687	3	34,20	38,40	3	33,67	37,81
4	7,018	4	6,250	4	45,60	51,20	4	44,89	50,41
5	8,773	5	7,812	5	57,00	64,00	5	56,12	63,02
6	10,527	6	9,374	6	68,39	76,81	6	67,34	75,62
7	12,282	7	10,937	7	79,79	89,61	7	78,56	88,23
8	14,036	8	12,499	8	91,19	102,41	8	89,79	100,83
9	15,791	9	14,061	9	102,59	115,21	9	101,01	113,43
10	17,545	10	15,624	10	113,99	128,01	10	112,23	126,04
20	35,091	20	31,248	20	227,98	256,02	20	224,47	252,07
30	52,636	30	46,872	30	341,97	384,03	30	336,70	378,11
40	70,181	40	62,495	40	455,96	512,04	40	448,94	504,15
50	87,727	50	78,119	50	569,95	640,05	50	561,17	630,18
60	105,272	60	93,743	60	683,94	768,06	60	673,40	756,22
70	122,817	70	109,367	70	797,93	896,06	70	785,64	882,26
80	140,363	80	124,991	80	911,92	1024,07	80	897,87	1008,29
90	157,908	90	140,615	90	1025,91	1152,08	90	1010,10	1134,33
100	175,453	100	156,239	100	1139,90	1280,09	100	1122,34	1260,37

RIDUZIONE

di tese, piedi, pollici e linee in metri, e decimali di metro.

<i>Tese</i>	<i>Metri</i>	<i>Piedi</i>	<i>Metri</i>	<i>Pol.</i>	<i>Metri</i>	<i>Lin.</i>	<i>Millim.</i>
1	1,94904	1	0,32484	1	0,02707	1	2,256
2	3,89807	2	0,64968	2	0,05414	2	4,512
3	5,84710	3	0,97452	3	0,08121	3	6,767
4	7,79615	4	1,29936	4	0,10828	4	9,023
5	9,74518	5	1,62420	5	0,13535	5	11,279
6	11,69422	6	1,94904	6	0,16242	6	13,535
7	13,64326	7	2,27388	7	0,18949	7	15,791
8	15,59229	8	2,59872	8	0,21656	8	18,047
9	17,54133	9	2,92355	9	0,24363	9	20,302
10	19,49037	10	3,24839	10	0,27070	10	22,558
20	38,98073	20	6,49679	11	0,29777	11	24,814
30	58,47110	30	9,74518	12	0,32484	12	27,070
40	77,96146	40	12,99358	13	0,35191	13	29,326
50	97,45183	50	16,24197	14	0,37898	14	31,582
60	116,94220	60	19,49037	15	0,40605	15	33,837
70	136,43256	70	22,73876	16	0,43312	16	36,093
80	155,92293	80	25,98715	17	0,46019	17	38,349
90	175,41329	90	29,23555	18	0,48726	18	40,605
100	194,90366	100	32,48394	19	0,51433	19	42,861
200	389,80732	200	64,96789	20	0,54140	20	45,117
300	584,71098	300	97,45183	30	0,81210	30	67,675
400	779,61464	400	129,93577	40	1,08280	40	90,233
500	974,51830	500	162,41972	50	1,35350	50	112,791
600	1169,42195	600	194,90366	60	1,62420	60	135,350
700	1364,32561	700	227,38760	70	1,89490	70	157,908
800	1559,22927	800	259,87155	80	2,16560	80	180,466
900	1754,13293	900	292,35549	90	2,43630	90	203,025
1000	1949,03659	1000	324,83943	100	2,70700	100	225,583
2000	3898,07318	2000	649,67886	200	5,41399	200	451,166
3000	5847,10977	3000	974,51830	300	8,12099	300	676,749
4000	7796,14636	4000	1299,35773	400	10,82798	400	902,332
5000	9745,18296	5000	1624,19716	500	13,53498	500	1127,915
6000	11694,21955	6000	1949,03659	600	16,24197	600	1353,498
7000	13643,25614	7000	2273,87602	700	18,94897	700	1579,081
8000	15592,29273	8000	2598,71546	800	21,65596	800	1804,664
9000	17541,32932	9000	2923,55489	900	24,36295	900	2030,246
10000	19490,36591	10000	3248,39432	1000	27,06995	1000	2255,829

RIDUZIONE

di metri in tese, e di metri in piedi, pollici e linee.

Met.	Tese.	Met.	Pie. pol. lin.	Met.	Pie. pol. lin.
1	0,513074	0,001	0. 0. 0,443	1	3. 0. 11,296
2	1,026148	0,002	0. 0. 0,887	2	6. 1. 10,593
3	1,539222	0,003	0. 0. 1,330	3	9. 2. 9,888
4	2,052296	0,004	0. 0. 1,773	4	12. 3. 9,184
5	2,565370	0,005	0. 0. 2,216	5	15. 4. 8,480
6	3,078444	0,006	0. 0. 2,660	6	18. 5. 7,776
7	3,591518	0,007	0. 0. 3,103	7	21. 6. 7,072
8	4,104592	0,008	0. 0. 3,546	8	24. 7. 6,368
9	4,617666	0,009	0. 0. 3,990	9	27. 8. 5,664
10	5,13074	0,01	0. 0. 4,433	10	30. 9. 4,96
20	10,26148	0,02	0. 0. 8,866	20	61. 6. 9,92
30	15,39222	0,03	0. 1. 1,299	30	92. 4. 2,88
40	20,52296	0,04	0. 1. 5,732	40	123. 1. 7,84
50	25,65370	0,05	0. 1. 10,165	50	153. 11. 0,80
60	30,78444	0,06	0. 2. 2,598	60	184. 8. 5,76
70	35,91518	0,07	0. 2. 7,031	70	215. 5. 10,72
80	41,04592	0,08	0. 2. 11,464	80	246. 3. 3,68
90	46,17666	0,09	0. 3. 3,897	90	277. 0. 8,64
100	51,3074	0,10	0. 3. 8,330	100	307. 10. 1,6
200	102,6148	0,11	0. 4. 0,763	200	615. 8. 3,2
300	153,9222	0,12	0. 4. 5,196	300	923. 6. 4,8
400	205,2296	0,13	0. 4. 9,628	400	1231. 4. 6,4
500	256,5370	0,14	0. 5. 2,061	500	1539. 2. 8,0
600	307,8444	0,15	0. 5. 6,494	600	1847. 0. 9,6
700	359,1518	0,16	0. 5. 10,927	700	2154. 10. 11,2
800	410,4592	0,17	0. 6. 3,360	800	2462. 9. 0,8
900	461,7666	0,18	0. 6. 7,793	900	2770. 7. 2,4
1000	513,074	0,19	0. 7. 0,226	1000	3078. 5. 4
2000	1026,148	0,20	0. 7. 4,659	2000	6156. 10. 8
3000	1539,222	0,3	0. 11. 0,989	3000	9235. 4. 0
4000	2052,296	0,4	1. 2. 9,318	4000	12313. 9. 4
5000	2565,370	0,5	1. 6. 5,648	5000	15392. 2. 8
6000	3078,444	0,6	1. 10. 1,977	6000	18470. 8. 0
7000	3591,518	0,7	2. 1. 10,307	7000	21549. 1. 4
8000	4104,592	0,8	2. 5. 6,637	8000	24627. 6. 8
9000	4617,666	0,9	2. 9. 2,966	9000	27706. 0. 0
10000	5130,740	1,0	3. 0. 11,296	10000	30784. 5. 4

Uso delle tavole di riduzione.

L'uso delle tavole precedenti non può comprendersi meglio che con qualche esempio.

1.° Debbono ridursi 1524,3 *palmi* napolitani in *piedi* parigini: si dovranno cercare separatamente nella tavola (1) i numeri di piedi corrispondenti a 1000 *palmi*, a 500, a 20 etc., ed aggiungerli insieme; e siccome nella tavola non si trovano 1000 *palmi* e 0,3 *palmi*, bisognerà ricavarli da 100 e da 3 col conveniente trasporto della virgola, come segue:

<i>per</i> 1000 <i>palmi</i>	814,403 <i>piedi</i>
500	407,202
20	16,288
4	3,258
0,3	0,244
<u>1524,3</u>	<u>1241,395</u>

2.° Siano da ridursi 5724,18 metri in piedi di Parigi. Dalla tavola (8) si avrà,

<i>per</i> 5000 <i>metri</i>	15392 ^o . 2 ^o . 8'
700	2154 . 10 . 11,2
20	61 . 6 . 9,9
4	12 . 3 . 9,2
0,18	6 . 7,8
<u>5724,18</u>	<u>17621 . 6 . 10,1</u>

ADDIZIONE.

Della maniera di scrivere i numeri usata dagli antichi romani.

I romani non avevano cifre apposite per la scrittura de' numeri, ma usavano le lettere del loro alfabeto disposte in un modo convenuto. Ecco i numeri principali con la loro corrispondenza in cifre arabe;

I, V, X, L, C, ID, CIO, IIO, CCIO etc.
1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000

Con questi caratteri indicavano anche tutti i numeri intermedi, servendosi di un'altra convenzione, cioè che un carattere di eguale o di minor valore posto dopo s'intendeva aggiunto, e posto innanzi s'intendeva sottratto, come qui appresso,

II, III, IV; VI, VII, VIII, IX; XI, XII; XIV, XV, XVI;
2, 3, 4; 6, 7, 8, 9; 11, 12; 14, 15, 16;
XIX, XX; XXX, XL; LX; XC; CX, CXX, CXLVII;
19, 20; 30, 40; 60; 90; 110, 120; 147;
CICCCCCXLII.

1842.

Alle cifre ID, CIO indicanti 500, e 1000 si sono anche sostituite le lettere D, M, dimodochè il numero 1842 si scriverebbe pure così, MDCCCXLII.

INDICE DELLE MATERIE.

AVVERTIMENTO	pagina. 3
-------------------------------	------------------

PRELIMINARI.

§. 1. <i>Distinzione delle diverse specie di grandezze, o quantità</i>	5
§. 2. <i>Del sistema di numerazione</i>	ivi
§. 3. <i>Maniera di leggere un numero</i>	8
§. 4. <i>Cosa sia un numero astratto, ed un numero concreto.</i>	9

OPERAZIONI SU I NUMERI INTERI.

§. 5. <i>Dell'addizione de' numeri interi</i>	ivi
§. 6. <i>Della sottrazione de' numeri interi.</i>	11
§. 7. <i>Della riprova dell'addizione e della sottrazione</i>	13
§. 8. <i>Della moltiplicazione de' numeri interi</i>	14
§. 9. <i>Della divisione de' numeri interi</i>	17
§. 10. <i>Riprova della moltiplicazione e della divisione</i>	21
<i>Pruova del nove.</i>	ivi

DELLE FRAZIONI IN GENERALE.

§. 11. <i>Di alcuni segni de' quali si fa uso nell'Algebra</i>	26
§. 12. <i>Origine delle frazioni</i>	27
§. 13. <i>Cosa significano numeratore e denominatore, frazione vera e frazione spuria</i>	29
§. 14. <i>Cambianti che si operano in una frazione, accrescendo o diminuendo, moltiplicando o dividendo uno de' suoi termini.</i>	30
§. 15. <i>Non si altera il valore di una frazione se si moltiplicano o si dividono i suoi termini per un medesimo numero</i>	32
§. 16. <i>Modo di ridurre una frazione a più semplice espressione</i>	33
§. 17. <i>Regole per conoscere quando un numero è divisibile per 2, per 3, per 5, o per 9.</i>	ivi
<i>Moltiplicazione della somma di più numeri per la somma di più altri</i>	35
§. 18. <i>Quali sono i numeri primi, ed i numeri primi fra loro.</i>	36
§. 19. <i>Trovare tutti i divisori di un numero dato.</i>	37
§. 20. <i>Ridurre una frazione a minimi termini per mezzo del massimo comune divisore.</i>	38

§. 21. Delle frazioni continue	40
§. 22. Dell'addizione e della sottrazione delle frazioni	42
§. 23. Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore	43
§. 24. Il prodotto che si ottiene dalle moltiplicazioni successive di più numeri fra loro non cambia di valore qualunque sia l'ordine col quale si eseguono le operazioni	45
§. 25. Dell'addizione e della sottrazione degl'interi accompagnati da frazioni	46
§. 26. La tavola del §. 14 serve per moltiplicare e per dividere una frazione qualunque per un numero intero	47
§. 27. Della moltiplicazione di un intero per una frazione, e di due frazioni fra loro	ivi
§. 28. Delle frazioni di frazioni, e del modo di ridurle a frazioni semplici	49
§. 29. Ridurre un intero ad una frazione spuria di dato denominatore, e quindi un intero ed una frazione ad una sola frazione	51
§. 30. Della moltiplicazione delle frazioni unite agl'interi	52
§. 31. Dividere un intero per una frazione, ed una frazione per un'altra frazione	ivi
§. 32. Della divisione delle frazioni unite agl'interi	53

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

§. 33. Origine delle frazioni decimali	ivi
§. 34. Maniera di scrivere le frazioni decimali e loro relazione con le frazioni ordinarie	55
§. 35. Una frazione decimale non si altera se alla sua destra si aggiungono o si sopprimono uno o più zeri	57
§. 36. Dell'addizione de' decimali	ivi
§. 37. Della sottrazione de' decimali	ivi
§. 38. Del complemento aritmetico	58
§. 39. Alterazione che soffre un decimale variando di luogo la virgola	60
§. 40. Della moltiplicazione de' decimali	61
§. 41. Maniera di ridurre una frazione ordinaria qualunque a frazione decimale	62
§. 42. Della divisione de' decimali	63
§. 43. Delle frazioni decimali periodiche	65
Regole per lo spezzamento delle frazioni decimali	66 e 67
Quali frazioni ordinarie ridotte a frazioni decimali divengono periodiche	67
§. 44. Data una frazione decimale qualunque, trovare la frazione ordinaria corrispondente	68
§. 45. Abbreviazione ne' calcoli	70

I. <i>Approssimazione da darsi ai fattori di una moltiplicazione per ottenere una data approssimazione nel prodotto.</i>	ivi
<i>Approssimazione da darsi al divisore per ottenere una data approssimazione nel quoziente</i>	72
II. <i>Errore di un prodotto dipendentemente dall'errore esistente ne' fattori.</i>	73
<i>Errore di un quoziente dipendentemente dall'errore esistente nel dividendo e nel divisore</i>	74
III. <i>Metodo abbreviato di eseguire la moltiplicazione.</i>	76
<i>Idem per la divisione</i>	77
IV. <i>Altre abbreviazioni di calcolo</i>	79

FORMAZIONE DEL QUADRATO E DEL CUBO, ED ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA E DELLA RADICE CUBICA DE' NUMERI.

§. 46. <i>Del quadrato e del cubo, della radice quadrata e della radice cubica.</i>	81
<i>Un numero intero, che non sia quadrato o cubo perfetto, non può avere per radice né un numero intero né un numero frazionario.</i>	82
§. 47. <i>Estrazione della radice quadrata dai numeri</i>	83
<i>Addizione, sottrazione, e moltiplicazione delle quantità unite co' segni + e —</i>	ivi
<i>Radice quadrata delle frazioni.</i>	88
<i>Approssimazione delle radici mediante le frazioni decimali</i>	89
§. 48. <i>Dell'estrazione della radice cubica dai numeri</i>	90
<i>Errore di una radice quadrata o cubica dipendentemente dall'errore esistente nel quadrato o nel cubo</i>	93
<i>Radici approssimate sino ad un limite dato</i>	93

DE' NUMERI CONCRETI E COMPLESSI.

§. 49. <i>Considerazioni generali</i>	94
§. 50. <i>Dell'addizione e della sottrazione de' numeri complessi</i>	96
§. 51. <i>Riduzione di un numero complesso a numero incompleto e viceversa</i>	97
§. 52. <i>Della moltiplicazione de' numeri complessi</i>	101
§. 53. <i>Della divisione de' numeri complessi</i>	107

TEORICA DELLE RAGIONI E DELLE PROPORZIONI.

§. 54. I. <i>Della ragione e della proporzione in generale</i>	112
II. <i>Una ragione geometrica non cambia di valore se si moltiplicano o si dividono i suoi termini per la stessa quantità—Il rapporto di due frazioni che hanno lo stesso denominatore è eguale a quello de' loro numeratori.</i>	113
III. <i>Dei rapporti commensurabile ed incommensurabile, e maniera di egualarli in numeri</i>	113

IV.	<i>La circostanza di non potersi assegnare esattamente la quantità di un rapporto incommensurabile non cambia la natura di esso</i>	115
V.	<i>Della proporzione geometrica</i>	116
	<i>Una proporzione contenente quantità incommensurabili deve anche riguardarsi come l'eguaglianza di due quozienti.</i>	117
§. 55.	<i>In ogni proporzione geometrica il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' termini medii.</i>	118
§. 56.	<i>Cambiamenti di luogo che possono effettuarsi ne' termini di una proporzione.</i>	119
	<i>Due frazioni che hanno lo stesso numeratore stanno fra loro in ragione inversa de' loro denominatori.</i>	120
§. 57.	<i>Non si altera una proporzione se si moltiplicano o si dividono i suoi antecedenti o i suoi conseguenti per un medesimo numero.</i>	ivi
§. 58.	<i>Se due proporzioni hanno una ragione di comune le due rimanenti ragioni sono eguali fra loro; se hanno gli stessi antecedenti i conseguenti sono in proporzione, e viceversa</i>	121
§. 59.	<i>Da ogni proporzione geometrica componendo o dividendo si ottiene un'altra proporzione</i>	122
§. 60.	<i>La somma o la differenza degli antecedenti di una proporzione sta rispettivamente alla somma o alla differenza de' conseguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente.</i>	124
§. 61.	<i>Se si ha una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come un antecedente al suo conseguente.</i>	125
§. 62.	<i>Moltiplicando fra loro o dividendo uno per l'altro i termini corrispondenti di due proporzioni, i prodotti o i quozienti saranno anche in proporzione</i>	126
§. 63.	<i>Se quattro grandezze sono proporzionali, le loro radici quadrate o cubiche sono anche in proporzione</i>	127
§. 64.	<i>Della ragione composta</i>	128

DELLA REGOLA DEL TRE E DI ALTRE CHE NE DIPENDONO.

§. 65.	<i>Della regola del tre</i>	130
	<i>Del medio geometrico</i>	131
§. 66.	<i>La regola del tre si distingue in diretta ed inversa quando si applica ai problemi di Aritmetica</i>	ivi
	<i>Problemi.</i>	134
§. 67.	<i>Regola del tre composta — Problemi</i>	135
	<i>Dell'unità di misura lineare, quadrata, e cubica.</i>	141
§. 68.	<i>Problemi d'interesse</i>	142
	<i>Espressioni generali dedotte dalla regola del tre composta.</i>	144
	<i>Regola pratica per calcolare gl'interessi</i>	145
	<i>Maniera più esatta di calcolare gl'interessi.</i>	146

	<i>Maniera usata in commercio</i>	146
§. 69.	<i>Regola di sconto</i>	147
	<i>Sconto all'infuori.</i>	148
§. 70.	<i>Della rendita consolidata</i>	149
§. 71.	<i>Degli interessi a moltiplico</i>	151
	<i>Nota nella quale si dimostra una regola per determinare il tempo in cui si raddoppia o si triplica un capitale posto a moltiplico ad un interesse qualunque</i>	153
§. 72.	<i>Dell'interessi a scalare. Vitalizi</i>	154
	<i>Tavola per calcolare i vitalizi.</i>	156
§. 73.	<i>Della regola congiunta</i>	158
§. 74.	<i>Della regola di compagnia.</i>	160
	<i>Problemi relativi alla partizione di una somma o di una contribuzione qualunque con date condizioni</i>	161
§. 75.	<i>Della proporzione aritmetica</i>	164
	<i>Nota sulle denominazioni usate da alcuni autori in vece delle antiche, proporzione aritmetica, e proporzione geometrica.</i>	ivi
	<i>Del medio aritmetico.</i>	165
§. 76.	<i>Regola di alligazione</i>	166

DELLE MISURE.

§. 77.	<i>Delle misure della città di Napoli prima della legge de' 6 Aprile 1840</i>	167
§. 78.	<i>Condizioni generali di un sistema metrico</i>	169
§. 79.	<i>Del sistema metrico decimale francese.</i>	171
	<i>Nota sul motivo che ha dovuto indurre i matematici a rigettare la nuova divisione decimale del cerchio.</i>	174
§. 80.	<i>Sistema metrico del Regno secondo la legge del 6 Aprile 1840</i>	175
§. 81.	<i>Del passo geodetico</i>	180
§. 82.	<i>Sistema metrico di Sicilia.</i>	181

CONFRONTO DELLE MISURE.

§. 83.	<i>Nozioni generali.</i>	182
§. 84.	<i>Avvertenze da usarsi nel calcolo delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche</i>	183
I.	<i>Le regole date pe' numeri astratti non soffrono alcuna modificazione quando l'unità lineare è divisa in parti decimali</i>	ivi
II.	<i>Addizione e sottrazione de' numeri espressi in unità quadrate o cubiche quando l'unità lineare è complessa.</i>	186
III.	<i>Moltiplicazione</i>	ivi
IV.	<i>Divisione</i>	196
	<i>Complemento della regola di approssimazione riguardante la divisione, data pag. 72.</i>	197
§. 85.	<i>Regole generali per determinare i rapporti delle misure, applicate al paragone del sistema metrico di Napoli e di Sicilia col sistema metrico francese.</i>	200
	<i>Paragone delle misure superficiali</i>	203

	<i>Paragone delle misure cubiche e di capacità.</i>	202
	<i>Paragone de' pesi.</i>	203
§. 86.	<i>Rapporti semplici approssimati dedotti dai rapporti esatti;</i>	
	<i>Tavole.</i>	205
	<i>TAVOLA di misure.</i>	206
	<i>Rapporti semplici approssimati di alcune misure.</i>	214
	<i>Rapporti esatti teorici di alcune misure.</i>	ivi
	<i>TAVOLA di monete.</i>	215
	<i>TAVOLE di riduzione.</i>	216
	<i>Uso delle tavole di riduzione.</i>	225
	<i>ADDIZIONE. Della maniera di scrivere i numeri usata dagli antichi romani.</i>	226

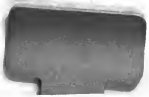
ERRORI

CORREZIONI

Pag.	Riga		
19	17. . .	Ciò permesso.	Ciò premesso
25	5. . .	426	428
39	4 risal.	$2 \times 425 + 78$	$2 \times 325 + 78$
46	2 risal.	$39 \frac{1}{2}$	$91 \frac{1}{2}$
59	21. . .	34,331	34,531
61	10 risal.	425,53	421,53
79	6 risal.	$\frac{N}{2} \times \frac{100}{3}$	$\frac{N}{2} \times \frac{100}{8}$
81	3. . .	$N 100 - N$	$N \times 100 - N$
ib.	4. . .	$N 2 \times 100 - N \times 2$	$N \times 2 \times 100 - N \times 2$
ib.	5. . .	$N 3 \times 100 - N \times 3$	$N \times 3 \times 100 - N \times 3$
ib.	6. . .	$N 4 \times 100 - N \times 4$	$N \times 4 \times 100 - N \times 4$
85	1. . .	$a - b$	$a - b$ per $a - b$
86	10 risal.	divisione di 50 per 8	divisione di 60 per 8
107	1 risal.	a 23 persone.	a 24 persone
131	10 risal.	in ordine a 6, 10 e 4	in ordine a 5, 10, 4

SbN 666757





BIBLIOTECA



